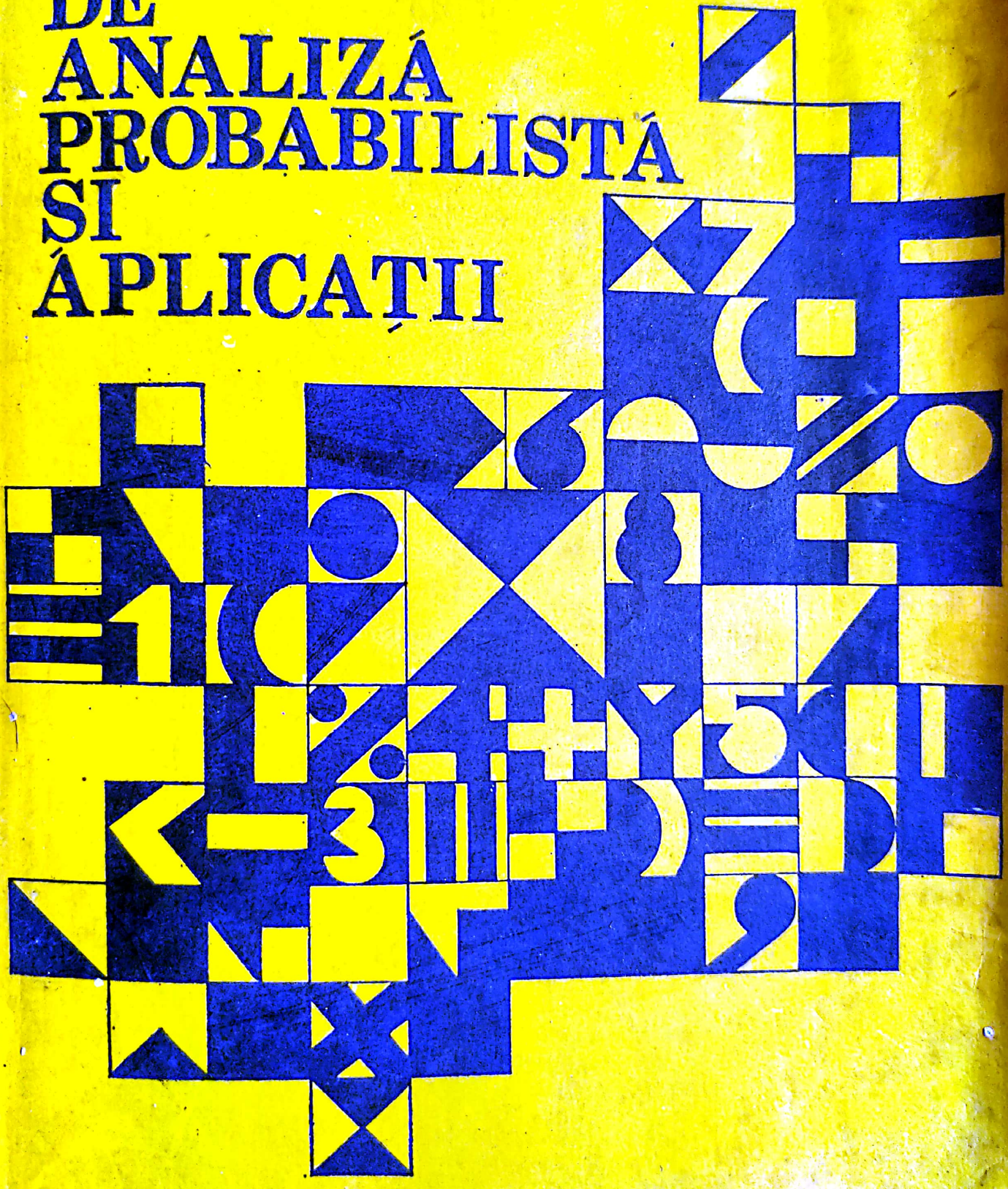
Gh. Constantin
Ioana Istrățescu

ELEMENTE DE ANALIZĂ PROBABILISTĂ ȘI APLICAȚII



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

GHEORGHE CONSTANTIN IOANA ISTRĂȚESCU

ELEMENTE DE ANALIZĂ PROBABILISTĂ ȘI APLICAȚII

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
1981

Scanned with OKEN Scanner

Elements of probabilistic analysis and applications

Элементы вероятностного анализа и его применения

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
R 79 717 București, Calea Victoriei nr. 125

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Legea lui Gauss de repartiție a erorilor nu este numai de atîta vreme cunoscută, dar este și folosită în diverse domenii ale cunoașterii ca o caracteristică a anumitor procese. Într-o conferință din 1937, la Universitatea liberă din Bruxelles, am arătat cum parametrii caracteristici ai unei astfel de repartiții gaussiene pot caracteriza varietatea de fasole princeps foarte stabilă.

Repartiția Poisson era cunoscută ca lege a fenomenelor rare. Repartițiile bernoulliene erau considerate în ansamblul lor drept reprezentative ale succesiunilor de evenimente repetate și independente într-un sistem finit de obiecte. Abia în 1942 însă, K. Menger a observat, în memoriul său Statistical metrics, *că obiectul principal al statisticii ca știință a mulțimilor statistice este legat de repartiție și a inițiat edificarea unei teorii metrice a acestor obiecte, considerate, în general, ca obiecte matematice.*

Diferite sisteme de repartiție se pot grupa în spații cvasimetrice, întrucît pentru ele nu există în general o relație triunghiulară. Această relație a fost înlocuită de Menger, apoi de Wald (1943) și de cei care au continuat și adîncit cercetarea prin crearea de diferite cvasinorme și diferite T-norme cu proprietăți de compoziție apropiate de cea triunghiulară a normelor. B. Schweizer și A. Sklar, începînd din 1958, și-au dedicat lucrările lor în special acestei statistici, acestor noi statistici și unor aplicații ale lor. Špaček și A. N. Šerstnev au adus importante contribuții teoretice care au dus împreună cu mulți alți matematicieni, printre care nu puțini români, la edificarea teoriei spațiilor metrice probabiliste sub aspectele lor analitice, algebrice și topologice.

În cartea „Numere și sisteme aleatoare" (1972) am consacrat un capitol teoriei generale a acestor spații, precum și un model special bazat pe spațiul variabilelor aleatoare. Valoroși matematicieni români din București și în ultima vreme din Timișoara au contribuit deasemenea la dezvoltarea acestei teorii.

Este desigur evident că ideile de bază ale cărții de față depășesc ca obiect spațiile metrice probabiliste, care le servesc mai ales ca suport și ocupă, în fapt, mai tot cuprinsul cărții. Dar, atmosfera care caracterizează expunerea acestui cuprins este dominată de două direcții de gîndire. Mai întîi, cea matematică, mai tehnică și pur analitică, este legată de problema a treisprezecea a lui Hilbert; a doua, de ideea că analiza matematică trebuie să întreprindă și studiul altor obiecte elementare decît punctul clasicei teorii. Autorii se întîlnesc pe acest drum cu multe cercetări ale matematicii actuale și în particular chiar cu acelea care privesc teoria probabilităților și care sînt curent cunoscute sub denumirea de teoria funcțiilor sumă. La confluența acestor puncte de plecare, pentru a lărgi în mod esențial cîmpul prea riguros atomic al actualei analize, se va găsi acea doctrină care va putea răspunde multora din marile probleme actuale ale științelor naturii.

OCTAV ONICESCU

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Introducere 9

Capitolul I

REPREZENTAREA FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABILE CU AJUTORUL COMPUNERII UNOR FUNCȚII DE MAI PUȚINE VARIABILE

§ 1. Contribuții privitoare la problema a 13-a a lui Hilbert și reprezentabilitatea funcțiilor asociative 11
§ 2. Observații privind aplicarea teoremelor de reprezentare la studiul t-normelor și t-conormelor 20

Capitolul II

SEMIGRUPURI PE SPAȚIUL FUNCȚIILOR DE REPARTIȚIE

§ 1. Clase de semigrupuri pe spațiul funcțiilor de repartiție 22
1.1. Funcții sumă, separatori, copule și proprietăți ale lor 22
1.2. Metrici și topologii pe spațiul funcțiilor de repartiție sau pe spațiul variabilelor aleatoare 35
1.3. Considerații asupra semigrupului definit de convoluție pe $\mathcal{R}$ 45
1.4. Considerații asupra τ_T și τ_T^*-semigrupurilor pe $\mathcal{R}$ 52
1.5. π_T-semigrupuri pe $\mathcal{R}^+$ 60
§ 2. Operații interne pe $\mathcal{R}$ induse de copule 60
2.1. σ_C-operații pe $\mathcal{R}$ și soluții ale ecuației asociativității pe $\mathcal{R}$ 61
2.2. Operații pe spațiul funcțiilor de repartiție care nu derivă din operații pe spațiul variabilelor aleatoare 71
§ 3. Considerații asupra unor metrici și operații interne pe anumite subspații ale lui $\mathcal{R}$ 74

Capitolul III

IDEI ȘI REZULTATE FUNDAMENTALE ÎN TEORIA STRUCTURILOR PROBABILISTE

§ 1. Puncte de vedere probabiliste în abordarea unor concepte ale analizei matematice 80
1.1. O teorie probabilistă a relațiilor 80
1.2. Spațiile metrice statistice introduse de K. Menger și A. Wald 84
1.3. Spațiile metrice probabiliste introduse de B. Schweizer și A. Sklar și proprietăți ale lor 86
1.4. Punctul de vedere introdus de Špaček și comentarii 100
1.5. Spațiile lui O. Onicescu, generalizări și alte rezultate 106
1.6. PM-spații metric-generate, E-spații și alte clase de spații metrice aleatoare .. 113
1.7. Spații Šerstnev, legătura cu alte clase anterioare și implicații noi în analiza probabilistă 119

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Procese aleatoare și spații metrice probabiliste 122
§ 3. Elemente de topologie probabilistă 135
3.1. Topologii probabiliste pe *PM*-spații 135
3.2. Continuitatea metricii probabiliste și problema completitudinii *PM*-spațiilor .. 139
3.3. Produse de structuri probabiliste 140
3.4. Măsuri aleatoare de necompacitate 142
§ 4. Elemente de analiză funcțională probabilistă 147
4.1. Considerații privind spațiile normate probabiliste 147
4.2. Aplicații liniare pe *SNP*-spații 154
4.3. Structuri cu produs interior probabilist 160
4.4. Spații local convexe probabiliste și aplicații la studiul aplicațiilor liniare 164
4.5. Algebre normate probabiliste 165
§ 5. Idei și rezultate privind teoreme de punct fix în analiza probabilistă 167

Capitolul IV

UNELE APLICAȚII ALE STRUCTURILOR PROBABILISTE

§ 1. Idei și rezultate privind teoria generalizată a informației 178
§ 2. Aplicații ale *PM*-spațiilor la studiul sistemelor ce posedă hysteresis și în procesele legate de amestecuri 179
§ 3. Spații stocastice cu aplicații în fizica microcosmosului 184
§ 4. Aplicații ale structurilor probabiliste în psihologie, teoria erorilor de măsurare și teoria fiabilității 188
Bibliografie 193
Abstract 203

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

În progresul continuu și fascinant pe care unele ramuri ale științelor naturii l-au înregistrat, au apărut noi domenii ale matematicii printre care și analiza probabilistă, rod al îmbinărilor metodelor analitice și al celor probabiliste cu noi instrumente puternice ca teoria proceselor aleatoare, integrale stocastice sau ecuații diferențiale stocastice, topologia sau analiza funcțională probabilistă și altele. Necesitatea creării unui aparat matematic adecvat cerințelor rezolvării unor probleme, explicării unor fenomene ale microcosmosului sau ale psihometriei și în general ale modelării cît mai fidele, a stat în atenția multor personalități de seamă ale științei ca H. Poincaré, M. Born, L. de Broglie, H. Weyl, N. Wiener, A. N. Kolmogorov, K. Menger, D. I. Blokhintsev, J. Kampé de Fériet, O .Onicescu și alții, care au contribuit la dezvoltarea acestuia.

Pornind de la rezultatele lui K. Menger, B. Schweizer și A. Sklar privind teoria structurilor probabiliste, de la noile domenii deschise în teoria informației și a statisticii informaționale de rezultatele lui J. Kampé de Fériet și O. Onicescu, abordăm acele elemente ale analizei probabiliste care au condus la dezvoltarea topologiei și analizei funcționale probabiliste. Ne ocupăm de problema reprezentabilității funcțiilor reale de mai multe variabile cu aplicații în studiul semigrupurilor, de problema structurii semigrupurilor pe spațiul funcțiilor de repartiție și a conexiunilor dintre acestea și operațiile de pe spațiul variabilelor aleatoare. Expunem cele mai reprezentative idei și rezultate privind structurile probabiliste, conexiuni ale acestora cu teoria proceselor aleatoare, rezultate privind existența punctelor fixe pentru clase de operatori aleatori și cîteva aplicații mai importante. Sînt expuse rezultate ale autorilor și ale membrilor seminarului de spații metrice probabiliste de la Universitatea din Timișoara, a cărui inițiere și coordonare s-a bucurat de generoasa și permanenta încurajare a acad. O. Onicescu căruia îi aducem mulțumirile și recunoștința noastră pentru sprijinul permanent pe care l-am primit și pentru îndrumările privind elaborarea acestei cărți. De asemenea aducem mulțumiri profesorului B. Schweizer de la Universitatea din Massachusetts, S.U.A., pentru interesul arătat și pentru sprijinul acordat în obținerea unei bibliografi exhaustive.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

REPREZENTAREA FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABILE CU AJUTORUL COMPUNERII UNOR FUNCȚII DE MAI PUȚINE VARIABILE

Problema reprezentării unor clase particulare de funcții de două sau mai multe variabile cu ajutorul compunerii unor funcții mai simple de o singură variabilă a constituit preocuparea unor matematicieni celebri. Amintim, de exemplu, contribuțiile lui N. H. Abel sau, mai edificator, faptul că D. Hilbert include în faimoasa sa colecție de probleme „Mathematische Probleme" [99] prezentată la Congresul Internațional de Matematică de la Paris din anul 1900, o problemă de acest tip. Acest fapt a dat un nou impuls cercetărilor în acest domeniu, cercetări de ale căror rezultate se leagă numele unor mari matematicieni ai secolului al XX-lea. Astfel, pentru început, s-a constatat că proprietatea de asociativitate oferă un cadru natural pentru investigații în cazul funcțiilor de două variabile amintind în acest sens rezultatele obținute de L. E. Brouwer [34], R. Cacciopoli [38], E. Cartan [42], T. S. Motzkin [179], J. Aczél [2], P. S. Mostert și A. Shields [178] și alții. Pentru cazul general al funcțiilor de două sau mai multe variabile rezultate remarcabile au fost date de către A. Ostrowski [208], D. Hilbert [98], W. Sierpiński [263], A. G. Vituškin [288], A. N. Kolmogorov [145], [146], V. I. Arnold [4] și alții.

Vom expune cîteva dintre ideile și rezultatele privind reprezentabilitatea funcțiilor și aplicații ale acesteia la studiul t-normelor sau t-conormelor care joacă un rol important în studiul structurilor probabiliste.

§ 1. CONTRIBUȚII PRIVITOARE LA PROBLEMA A 13-a A LUI HILBERT ȘI REPREZENTABILITATEA FUNCȚIILOR ASOCIATIVE

Problema a 13-a a lui Hilbert este legată de una dintre cele mai vechi probleme ale matematicii (rezolvarea ecuațiilor algebrice), împletindu-se totodată în mod armonios cu problematica modernă a matematicii. De fapt ea exprimă imposibilitatea rezolvării ecuației generale de gradul VII cu ajutorul funcțiilor care depind numai de două variabile. Mai explicit, conjectura sa are următoarea formulare: „există funcții analitice de trei variabile care nu se reprezintă ca și compuse de funcții continue de două variabile".

În cazul funcțiilor analitice de mai multe variabile Hilbert a demonstrat imposibilitatea reprezentării lor cu ajutorul unor compuse de funcții analitice de mai puține variabile. Rezultatele din acest domeniu au o importanță

Scanned with OKEN Scanner

deosebită pentru problema rezolubilității ecuațiilor algebrice în termenii superpozițiilor de funcții algebrice de mai puține variabile [98], [295], [43].

Cel mai surprinzător rezultat în această direcție l-a constituit lucrarea lui A. N. Kolmogorov din 1956 [145] în care demonstrează că orice funcție continuă de n variabile poate fi reprezentată sub formă de compuse de funcții continue de 3 variabile. Continuînd eforturile în această direcție V. I. Arnold în 1957 [4] reușește să arate că elementele compunerii pot fi funcții numai de două variabile. Putem considera că încheierea acestui ciclu de rezultate o constituie teorema lui Kolmogorov [146] de reprezentare a oricărei funcții continue de n variabile sub forma

$$(I) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \psi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_j) \right)$$

în care toate funcțiile ψ_i și φ_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$; $j = 1, 2, \ldots, n$ sînt continue iar funcțiile φ_{ij} nu depind de funcția f, ele putînd fi alese arbitrar.

Această reprezentare utilizînd numai compuse de funcții continue de o variabilă și operația de adunare, reprezintă infirmarea conjecturii lui D. Hilbert enunțată mai sus, în sensul că soluția ecuației de gradul VII poate fi reprezentată sub formă de compuse de funcții continue de o variabilă și operația de adunare. Cu toate acestea problema în esență rămîne deschisă, în sensul că rămîne posibilitatea demonstrării nerezolvabilității ecuației de gradul VII înaltă clasă de funcții de două variabile care conține clasa funcțiilor algebrice de două variabile, întrucît rezultatele cunoscute nu contrazic, de exemplu posibilitatea ca soluția unei astfel de ecuații să nu fie reprezentată ca și compusa unui număr finit de funcții analitice de două variabile.

Demonstrația dată de Kolmogorov în [145] utilizează construcții și raționamente de o rară ingeniozitate, iar cea din [146] este mai elementară și conține ca un caz particular o generalizare a rezultatului lui Arnold [4], în sensul că numărul termenilor sumei din formula de reprezentare pentru $n = 3$ este redus de la 9 la 7.

Vom prezenta mai jos o demonstrație dată de T. Hedberg [96] inspirată din lucrările lui G. G. Lorentz [156] și J. P. Kahane [127] care utilizează argumentele teoremelor asupra categoriei lui Baire și are avantajul de a simplifica demonstrațiile cunoscute și de a oferi diferite rafinări ale rezultatului de bază.

Fie $\mathbf{I} = [0,1]$, $C(\mathbf{I}^n)$, $n \geqslant 1$, spațiul Banach al funcțiilor reale continue pe $\mathbf{I}^n$, cu norma $||f|| = \max |f(x)|$, $x \in \mathbf{I}^n$. Vom avea

Teorema 1.1.1. (teorema lui Kolmogorov) *Dacă $n \geqslant 2$ atunci există sistemul de numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ și elementele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n+1} \in C(\mathbf{I})$ cu proprietatea că pentru orice funcție $f \in C(\mathbf{I}^n)$ există o funcție $g \in C(\mathbf{R})$ astfel încît să avem*

$$(1) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{2n+1} g(\lambda_1 \varphi_k(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi_k(x_n)).$$

Pentru simplitatea scrierii și notațiilor vom face demonstrația în cazu $n = 2$ făcînd observațiile necesare cu privire la eventualele modificări de raționament în cazul $n > 2$.

Să dăm mai întîi

Lema 1.1.1. *Fie $\mathbf{Q}$ mulțimea numerelor raționale; atunci există un număr real λ astfel încît relația $x + \lambda y = x' + \lambda y'$, $x, y, x', y' \in \mathbf{Q}$ să implice $x = x'$, $y = y'$.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația acestei leme rezultă imediat alegînd pe λ orice număr irațional.

Lema 1.1.2. *Fie* λ *un număr fixat satisfăcînd ipotezele din lema* 1.1.1, $f \in C(\mathbf{I}^2)$, $||f|| = 1$ *iar prin* U_f *să notăm submulțimea lui* $C(\mathbf{I})^5$ *formată din elementele* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5) \in C(\mathbf{I})^5$ *pentru care există* $g \in C(\mathbf{R})$ *astfel încît să avem:*

$$\text{(i)} \qquad |g(t)| \leqslant \frac{1}{7}, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$\text{(ii)} \qquad |f(x, y) - \sum_{i=1}^{5} g(\varphi_i(x) + \lambda\, \varphi_i(y))| < \frac{7}{8}, \qquad (x, y) \in \mathbf{I}^2$$

Atunci vom avea că U_f *este o mulțime deschisă densă în* $C(\mathbf{I})^5$.

Demonstrație. Justificarea afirmației că U_f este deschisă rezultă imediat din observația că dacă g acționează în modul cerut pentru un element particular din $C(\mathbf{I})^5$ ea se comportă la fel pe o vecinătate suficient de mică a acestuia.

Să arătăm că U_f este densă în $C(\mathbf{I})^5$ considerată ca spațiu metric cu metrica naturală adică

$$\rho((\varphi_1, \ldots, \varphi_5), (\varphi_1', \ldots, \varphi_5')) = \left(\sum_{i=1}^{5} ||\varphi_i - \varphi_i'||^2\right)^{1/2}.$$

Pentru aceasta să considerăm elementele $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_5^0 \in C(\mathbf{I})$ și $f \in C(\mathbf{I}^2)$, $||f|| = 1$ și să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ putem determina elementele $\varphi_i \in C(\mathbf{I})$ astfel ca $||\varphi_i - \varphi_i^0|| < \varepsilon$ păstrîndu-se proprietățile (i), (ii). Să considerăm un număr natural n și mulțimea subintervalelor lui $\mathbf{I}$ care se obțin scoțînd din $\mathbf{I}$ intervalele de forma $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ pentru $0 \leqslant j < n, j \equiv (i-1) \pmod 5$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Să notăm prin δ_i mulțimea intervalelor închise rămase la care se adaugă extremitățile respective și să observăm că, cu excepția posibilă a două dintre ele, lungimea fiecărui interval din δ_i este $\frac{4}{n}$.

Se verifică ușor că dacă n este suficient de mare se pot defini funcțiile $\varphi_i \in C(\mathbf{I})$ cu următoarele proprietăți:

a) φ_i este o constantă (un număr rațional) pe fiecare interval din δ_i,

b) φ_i ia valori distincte pe intervale diferite din δ_i și de asemenea pentru $i \neq j$ valorile luate de φ_i pe intervalele din δ_i diferă de valorile luate de φ_j pe intervalele din δ_j,

c) $||\varphi_i - \varphi_i^0|| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, 5$.

Să notăm prin Δ_i mulțimea intervalelor bidimensionale de rang i din $\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \mathbf{I}^2$ obținute ca produsul cartezian a două intervale de rang i din δ_i (respectiv unul conținut în $\mathbf{I} = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ și celălalt în $\mathbf{I} = \{y: 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ care evident aproape toate sînt pătrate de latură $\frac{4}{n}$.

Se definesc funcțiile

$$\text{(2)} \qquad \Phi_i(x, y) = \varphi_i(x) + \lambda\, \varphi_i(y), \quad i = 1, 2, \ldots, 5$$

și se observă că Φ_i sînt constante pe fiecare interval bidimensional de rang i iar dacă se notează cu $\Delta_{i,1}$, $\Delta_{i,2}$, ... elementele mulțimii Δ_i aceste funcții conform lemei 1.1.1 iau valori constante pe fiecare $\Delta_{i,r}$ notate prin $\Phi_i(\Delta_{i,r})$. Se vede ușor că nu putem avea $\Phi_i(\Delta_{i,r}) = \Phi_j(\Delta_{j,s})$ decît în cazul banal cînd $i = j$, $r = s$.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că n este suficient de mare încît să avem relația

$$(3) \qquad |f(x, y) - f(x', y')| < \frac{1}{7} \text{ pentru } (x - x')^2 + (y - y')^2 \leqslant \frac{32}{n^2}$$

ceea ce este posibil datorită uniform continuității lui f pe $\mathbf{I}^2$.

Pentru construcția funcției g să ne fixăm asupra unui interval bidimensional oarecare de rang arbitrar $\Delta_{i,r}$ și să definim

$$g(\Phi_i(\Delta_{i,r})) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & \text{dacă } f(x, y) > 0 \text{ în orice punct din } \Delta_{i,r} \\ -\frac{1}{7} & \text{dacă } f(x, y) < 0 \text{ în orice punct din } \Delta_{i,r} \end{cases}$$

și să prelungim la toată dreapta $\mathbf{R}$ prin continuitate devenind astfel liniară pe porțiuni și satisfăcînd cu ușurință condiția (i) (definiția este consistentă căci numerele $\Phi_i(\Delta_{i,r})$ corespunzătoare la perechi distincte (i, r) sînt distincte).

Pentru verificarea proprietății (ii) să observăm că alegînd un punct arbitrar $(x, y) \in \mathbf{I}^2$ atunci, întrucît x aparține oricărui interval de rang i excepînd cel mult o valoare a lui i, în mod asemănător y, rezultă că (x, y) este conținut cel puțin în trei intervale bidimensionale de rang diferit. Vom considera trei cazuri distincte:

1) dacă $f(x, y) > \frac{1}{7}$, atunci din relația (3) rezultă că $f(x, y)$ este pozitivă pe fiecare interval bidimensional ce conține pe (x, y) și deci avem

$$(4) \qquad f(x, y) - \sum_{i=1}^{5} g(\Phi_i(x, y)) \leqslant 1 - \frac{3}{7} + \frac{2}{7} < \frac{7}{8}$$

deoarece cel puțin trei dintre numerele $g(\Phi_i(x, y))$ sînt egale cu $\frac{1}{7}$. Pe de altă parte membrul stîng al relației (4) este mai mare decît $\frac{1}{7} - \frac{5}{7} = -\frac{4}{7}$ și rezultă că (ii) este verificată în acest caz.

2) Dacă $f(x, y) < -\frac{1}{7}$ se procedează analog cu cazul 1).

3) Cazul în care $|f(x, y)| \leqslant \frac{1}{7}$ se rezolvă simplu pe baza observației că atunci modulul membrului stîng al inegalității (4) nu poate depăși valoarea $\frac{6}{7}$ și deci (ii) este verificată ceea ce demonstrează lema 1.1.2.

Un rezultat similar este dat de

Lema 1.1.3. *Fiind dat λ ca și în lema 1.1.2 și $f \in C(\mathbf{I}^2)$ atunci există $\varphi_1, \ldots, \varphi_5 \in C(\mathbf{I})$ și $g \in C(\mathbf{R})$ astfel ca să avem:*

$$(i) \qquad |g(t)| < \frac{1}{7} \|f\|, \quad t \in \mathbf{R},$$

(ii) $$\left\| f - \sum_{i=1}^{5} g \circ \Phi_i \right\| \leqslant \frac{8}{9} \|f\|$$

unde Φ_i *sînt funcțiile definite prin relația* (2).

Demonstrația teoremei 1.1.1. (în cazul $n = 2$). Fie $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = \lambda$ iar $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5)$ un element a cărui existență este asigurată de lema 1.1.3.

Să arătăm că sînt îndeplinite condițiile teoremei 1.1.1, pentru aceasta să considerăm un element $f \in C(\mathbf{I}^2)$ și să definim prin inducție șirul $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ în $C(\mathbf{I}^2)$ și un șir $\{g_i\}_{i=0}^{\infty}$ în $C(\mathbf{R})$ în felul următor:

$$f_0 = f$$

$$f_{i+1} = f_i - \sum_{k=1}^{5} g_i \circ \Phi_k$$

unde $g_i \in C(\mathbf{R})$ este aleasă astfel ca să avem

$$\|g_i\| \leqslant \frac{1}{7} \|f_i\|, \left\| f_i - \sum_{k=1}^{5} g_i \circ \Phi_k \right\| \leqslant \left(\frac{8}{9}\right) \|f_i\|$$

alegere care este posibilă datorită lemei 1.1.3.

Să observăm că avem $\|f_{i+1}\| \leqslant \frac{8}{9} \|f_i\|$ și prin urmare $\|f_i\| \leqslant (8/9)^i \cdot \|f\|$ și $\|g_i\| \leqslant (1/7)\,(8/9)^i\,\|f\|$. Aceste condiții asigură convergența în normă a seriei $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ către un element $g \in C(\mathbf{R})$ și putem scrie

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i - f_{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{5} g_i \circ \Phi_k = \sum_{k=1}^{5} g \circ \Phi_k$$

ceea ce demonstrează teorema.

În legătură cu demonstrația teoremei în cazul general ($n > 2$) să observăm că lema 1.1.1 poate fi formulată astfel:

Lema 1.1.4. *Se pot determina n-uple de numere reale* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *astfel ca relația* $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = \lambda_1 x_1' + \ldots + \lambda_n x_n'$, $x_1, x_1', \ldots, x_n, x_n' \in \mathbf{Q}$ *să implice* $x_i = x_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se poate arăta că funcțiile φ_i pot fi monoton nedescrescătoare, pentru că dacă $\mathbf{A}$ este submulțimea închisă a lui $C(\mathbf{I})$ formată din funcțiile nedescrescătoare se pot utiliza raționamentele teoriei categoriei lui Baire în $\mathbf{A}^5$ în loc de $C(\mathbf{I})^5$. Se știe că orice funcție continuă de o variabilă $f(t)$ poate să fie reprezentată sub forma $f(t) = f_1(\varphi_1(t)) + f_2(\varphi_2(t)) + f_3(\varphi_3(t))$ unde funcțiile f_i, φ_i sînt absolut continue [6] și rezultă că fiecare funcție continuă de n variabile poate fi reprezentată cu ajutorul superpozițiilor de funcții monotone absolut continue și operația de adunare.

V. M. Tihomirov și independent de el P. A. Ostrand [207] au demonstrat că teorema lui Kolmogorov poate fi generalizată astfel: pentru orice mulțime compactă $\mathbf{K}$ de dimensiune n există o scufundare omeomorfă $\psi(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_{2n+1}(x))$, $x \in \mathbf{K}$, în spațiul euclidian $2n + 1$-dimensional, astfel că orice funcție continuă $f(x)$ pe $\mathbf{K}$ poate fi reprezentată sub forma $f(x) = f_1(\psi_1(x)) + f_2(\psi_2(x)) + \ldots + f_{2n+1}(\psi_{2n+1}(x))$, unde f_i sînt funcții continue de o variabilă. Micșorarea numărului de termeni nu este posibilă întrucît există mulțimi

Scanned with OKEN Scanner

compacte de dimensiune n care nu se pot reprezenta omeomorf într-un spațiu euclidian $2n$-dimensional.

Se deduce că spațiul funcțiilor continue de o variabilă se poate reprezenta liniar și continuu în metrica uniformă pe spațiul funcțiilor continue de n variabile sau că toate spațiile de funcții continue pe mulțimi compacte de puterea continuului sînt izomorfe.

Una din cele mai interesante probleme legată de tematica superpozițiilor este aceea dacă există sau nu funcții analitice de două variabile care nu se reprezintă sub forma unui număr finit de superpoziții de funcții continuu diferențiabile de o variabilă și operația de adunare. Contribuții în acest sens au fost aduse în [290], [97], [289].

Menționăm că G. Lorentz [157] a arătat că în reprezentarea lui Kolmogorov (I) putem lua $\varphi_{ij}(x_j) \in \mathbf{Lip}\ \frac{1}{5}$, G. Henkin a arătat că se pot considera $\varphi_{ij}(x_j) \in \mathbf{Lip}\ \alpha$, $\alpha < 1$ și acest rezultat a fost generalizat în [83] pentru $\varphi_{ij}(x_j) \in \mathbf{Lip}\ 1$. S-ar putea crede că și în reprezentarea (1) se poate lua $\varphi_i \in \mathbf{Lip}\ 1$ pe $[0,1]$ ceea ce nu este adevărat căci ar fi contrazise rezultatele din [97], [288] care stabilesc că nu există φ_i continuu diferențiabile care să verifice (1). Cu toate acestea argumentele folosite în demonstrația teoremei pot fi modificate astfel încît φ_i să fie „aproape" de clasă **Lip** 1. În acest scop să notăm prin h o funcție pozitivă, nedescrescătoare și subaditivă pe $[0, \infty)$ care satisface condiția $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{h(t)}{t} = \infty$, $\mathbf{A}_h = \{\varphi \in C(\mathbf{I}):\ \omega(\varphi, t) = 0(h(t)),\ t \to 0\}$ pentru care avem $||\varphi||_h = ||\varphi||_\infty + \sup\limits_{t>0} \frac{\omega(\varphi, t)}{h(t)} < \infty$, unde prin $\omega(\varphi, t)$ s-a notat modulul de continuitate al lui φ iar $||\varphi||_\infty = \sup\limits_{t\in \mathbf{I}} |\varphi(t)|$. Se verifică ușor că $\mathbf{A}_h$ este un spațiu Banach relativ la norma $||\cdot||_h$ și vom avea

Teorema 1.1.2. *Funcțiile φ_i din reprezentarea* (1) *pot fi alese din $\mathbf{A}_h$, adică $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pot fi alese astfel ca $2n+1$-uplele $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n+1})$ exceptînd o mulțime de prima categorie relativ la spațiul metric $\mathbf{A}_h^{2n+1}$ să aibă proprietățile din reprezentarea* (1).

În teorema 1.1.1 sau 1.1.2 putem presupune că g aparține la o subclasă de funcții din $C(\mathbf{R})$ și anume dacă avem că funcțiile Φ_i au valorile în $[0, c]$ cu $c < 2\pi$ atunci se poate alege $g(t) = f(e^{it})$ unde f este un element al algebrei funcțiilor continue pe $\{z:\ |z| \leqslant 1\}$ și analitice pe $\{z:\ |z| < 1\}$.

În ceea ce privește micșorarea numărului de termeni din cei $2n+1$ ai sumei exterioare, cu păstrarea proprietății ca mulțimea funcțiilor astfel reprezentabile să rămînă nicăieri densă în $C(\mathbf{I}^2)$, amintim rezultatul lui V. I. Arnold [5] care demonstrează că mulțimea funcțiilor de forma $\chi(\varphi(x) + \psi(y))$ cu χ, φ, ψ funcții continue, este nicăieri densă în $C(\mathbf{I}^2)$. În [96] se arată că pentru $n = 2$ numărul termenilor din (1) nu poate fi redus. O problemă deschisă este aceea dacă $2n+1$ este cel mai bun număr posibil în cazul $n > 2$.

În legătură cu aceste probleme, în cazul $n = 2$, M. L. Gerver a arătat că există funcții continue $f(x, y)$ care nu sînt egale cu superpoziții de forma $\sum\limits_{i=1}^{2} f_i(\varphi_i(x)) + \psi_i(y))$, unde φ_i, f_i, ψ_i sînt funcții continue de o variabilă. Alte rezultate legate de diferite forme de superpoziții pot fi găsite în [7], [145], [288], [156].

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că reprezentările de forma $\chi(\varphi(x) + \psi(y))$ joacă un rol important în teoria t-normelor şi a funcţiilor asociative de două variabile, care stau la baza multor structuri probabiliste, să amintim că printre primele rezultate importante este cel dat de W. Sierpiński [263] care arată că pentru orice funcţie de două variabile $F(x, y)$ există funcţiile g, h, k de o variabilă, astfel încît să avem $F(x, y) = g(h(x) + k(y))$ iar în cazul funcţiilor simetrice se poate lua $h = k$.

Din cele expuse mai sus cu privire la rezultatul lui V. I. Arnold [5] se observă că cerinţa de continuitate asupra funcţiilor g, h, k micşorează mult clasa funcţiilor de două variabile reprezentabile sub forma amintită şi avem că: „se poate determina o mulţime închisă în pătratul $\mathbf{D} = \{(x, y): |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2\}$ astfel că pentru orice funcţie continuă $f(x, y)$ care are pe M drept mulţime a zerourilor să existe $\delta(f) >$ o astfel încît $|f(x, y) - \chi(\varphi(x) + \psi(y))| \geqslant \delta$ într-un punct oarecare din $\mathbf{D}$, pentru orice χ, φ, ψ, funcţii continue; fiecare funcţie continuă ce are pe $\mathbf{M}$ ca mulţime de nivel nu se reprezintă sub forma $\chi(\varphi(x) + \psi(y))$ în vecinătate".

Teorema 1.1.3. *Fie* $\chi_n(\varphi_n + \psi_n)$ *un şir de funcţii în care* φ_n, ψ_n *sînt continue pe* $[0, 1]$ *iar* χ_n *continue pe mulţimea valorilor funcţiilor* $\varphi_n + \psi_n$., *Dacă acest şir converge uniform în* $\mathbf{I}^2 = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1,_n \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ *către o funcţie* Φ *monotonă în* $\mathbf{I}^2$ *atunci* $\Phi(x, y) = \chi(\varphi(x) + \varphi(y))$ *unde* χ, φ, ψ *sînt continue.*

Nu vom demonstra această teoremă dar vom da un exemplu [5] util în aplicaţiile din paragrafele următoare din care rezultă că ipoteza de monotonie este esenţială şi anume: „funcţia $\Phi(x, y) = xy$ nu se reprezintă pe $\mathbf{I}^2$ sub forma $\chi(\varphi(x) + \psi(y))$ deşi coincide cu limita uniformă a şirului de funcţii $\exp\left(\ln\left(x + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(y + \frac{1}{n}\right)\right)$ ai cărui termeni sînt reprezentabili sub forma amintită".

În adevăr dacă $xy = \chi(\varphi(x) + \psi(y))$ în orice punct din $\mathbf{I}^2$ atunci funcţia $\varphi(x) + \psi(y)$ în punctele $(0,0)$, $(0,1)$ şi $(1,0)$ ar primi una şi aceeaşi valoare. Pentru a justifica aceasta să observăm că oricare două din aceste trei puncte pot fi unite printr-o linie poligonală care să nu aibă alte puncte comune cu mulţimea $\{(x, y): xy = 0\}$ decît extremităţile, precum şi cu o linie poligonală conţinută în întregime în această mulţime. Dacă la capetele acestor linii poligonale funcţia $\varphi(x) + \psi(y)$ ar primi două valori distincte $a \neq b$ atunci valoarea intermediară $\frac{a + b}{2}$ ar fi primită atît pe această mulţime cît şi în afara ei (din proprietatea lui Darboux pentru funcţia $\varphi + \psi$ şi deci am avea pe de o parte $\chi\left(\frac{a + b}{2}\right) = 0$ şi pe de altă parte $\chi\left(\frac{a + b}{2}\right) > 0$. Această contradicţie conduce la relaţiile $\varphi(0) + \psi(0) = \varphi(0) + \psi(1) = \varphi(1) + \psi(0$ din care rezultă că $\varphi(0) + \psi(0) = \varphi(1) + \psi(1)$ şi deci $0 = \chi(\varphi(0) + \psi(0)) = \chi(\varphi(1) + \psi(1)) = 1$ ceea ce contrazice existenţa unor astfel de funcţii continue φ, ψ şi χ pentru care să avem $xy = \chi(\varphi(x) + \psi(y))$.

Un alt exemplu de funcţie nereprezentabilă sub forma $\chi(\varphi(x) + \psi(y))$ este dat de $f(x, y) = \text{Min}\ (x, y)$, $(x, y) \in \mathbf{I}^2$ deşi este aproximabilă prin funcţii de această formă.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru formularea unor rezultate privind reprezentabilitatea dată

Definiția 1.1.1. Se numește *neutralizator la stînga* al funcției f o funcție g cu proprietatea că $g \circ f \subseteq \varphi$ adică $g(f(x)) = x$ oricare ar fi x din domeniul de definiție al aplicației $g \circ f(\varphi(x) = x, x \in \mathbf{R})$.

Se obișnuiește ca în cazul funcțiilor continue și strict monotone să se aleagă un neutralizator la stînga particular, dat prin

Definiția 1.1.2. Fie f o funcție continuă și strict crescătoare, definită pe intervalul închis $\mathbf{J} = [a, b]$ și cu valori în intervalul închis al dreptei reale extinse, $[0, \infty]$. Se numește *pseudoinversa funcției* f, funcția $f^{(-1)}$: $[0, \infty] \to [a, b]$ dată prin

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} a, & \text{dacă } x \in [0, f(a)], \\ f^{-1}(x), & \text{dacă } x \in [f(a), f(b)] \\ b, & \text{dacă } x \in [f(b), \infty]. \end{cases}$$

Dacă f este continuă și strict descrescătoare pseudoinversa sa va fi dată prin

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} b, & \text{dacă } x \in [0, f(b)], \\ f^{-1}(x), & \text{dacă } x \in [f(b), f(a)], \\ a, & \text{dacă } x \in [f(a), \infty]. \end{cases}$$

Se verifică ușor că pseudoinversa $f^{(-1)}$ este continuă, motononă în sens slab și că $f^{(-1)} \circ f = \varphi_{[a, b]}$ adică $f^{(-1)}$ este neutralizator la stînga pentru f, iar f este subinversa la dreapta a lui $f^{(-1)}$.

Se impun aplicației F condiții suplimentare dar care se par naturale, ele fiind îndeplinite în majoritatea cazurilor și avem

Teorema 1.1.4. [152] *Fie* $\mathbf{J}$ *un interval închis* $[a, b]$ *al dreptei extinse* $\mathbf{R}$ *și* $F: \mathbf{J} \times \mathbf{J} \to \mathbf{J}$ *o funcție asociativă cu proprietățile:*

a) *F este continuă,*

b) *F este nedescrescătoare în raport cu fiecare variabilă,*

c) *extremitatea a este element unitate la stînga, adică $F(a, x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbf{J}$,*

d) *pentru orice $x \in \operatorname{Int}(\mathbf{J})'$ avem $F(x, x) > x$.*

Atunci există o funcție continuă și strict crescătoare $f: \mathbf{J} \to \mathbf{R}$ astfel încît F să admită reprezentarea $F(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$, unde $f^{(-1)}$ este pseudoinversa lui f.

Nu vom insista asupra demonstrațiilor, ele putînd fi găsite și în [124], [55]. Precizăm însă că f se numește *generator aditiv pentru* F și că are loc afirmația reciprocă: dacă $\mathbf{J}$ este un interval închis din $\mathbf{R}$, $f: \mathbf{J} \to [0, \infty]$ continuă și strict crescătoare iar $g: [0, \infty] \to \mathbf{J}$ pseudoinversa lui f, atunci funcția F definită prin $F(x, y) = g(f(x) + f(y))$ definește un semigrup cu proprietățile a), b), d) din teorema 1.1.4.

În legătură cu unicitatea lui f avem că dacă f și g sînt generatori aditivi ai lui F, atuci există un $\lambda > 0$ astfel încît $g = \lambda f$ și reciproc dacă f este un generator aditiv al lui F atunci și $g = \lambda f$ este un astfel de generator.

În multe aplicații concrete se întîlnește

Teorema 1.1.5. (forma duală a teoremei 1.1.4) *Fie* $\mathbf{J} = [a, b] \subseteq \bar{\mathbf{R}}$ *și* $F: \mathbf{J} \times \mathbf{J} \to \mathbf{J}$ *o funcție asociativă cu proprietățile:*

a) *F este continuă,*

b) *F este nedescrescătoare în raport cu fiecare variabilă,*

Scanned with OKEN Scanner

c') *extremitatea* b *a lui* $\mathbf{J}$ *este element unitate la stînga,*

d') *pentru orice* $x \in \mathrm{Int}\ (\mathbf{J})$ *avem* $F(x, x) < x$.

Atunci există o funcție continuă și strict descrescătoare $f: \mathbf{J} \to [0, \infty]$ *astfel ca* F *să admită reprezentarea* $F(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$, *unde* $f^{(-1)}$ *este pseudo-inversa lui* f.

Demonstrația rezultă din observația că teorema 1.1.4 implică duala sa și reciproc.

După terminologia lui C-H. Ling [152] amintim că se numește *semigrup arhimedian* orice semigrup care verifică ipotezele teoremei 1.1.4 sau 1.1.5 și dacă fiecare generator aditiv al semigrupului este nemărginit, semigrupul se numește *arhimedian propriu*. Dacă $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \infty$ atunci $f(b) = 0$, deci $f^{(-1)}$ este strict monotonă și coincide cu f^{-1}.

Cu privire la legătura dintre teorema lui Ling și rezultatele din teoria semigrupurilor topologice obținute în [75], [178] amtinim

Teorema lui Faucett. *Fie* $\mathbf{J} = [a, b] \subseteq \bar{\mathbf{R}}$ *și* $F: \mathbf{J} \times \mathbf{J} \to \mathbf{J}$ *o funcție asociativă și continuă. Dacă* a *este element unitate pentru operația binară* F, b *este anihilator (elementul zero) și nici un element* $x \in \mathrm{Int}(\mathbf{J})$ *nu este nilpotent atunci există o funcție surjectivă, strict crescătoare și continuă* $f: \mathbf{J} \to [0, \infty]$ *astfel încît* $f(F(x, y)) = f(x) + f(y)$.

Teorema lui Mostert și Shields. *Fie* $(\mathbf{J}, F)$ *un semigrup ordonat care verifică ipotezele teoremei lui Faucett exceptînd cea cu privire la elementele nilpotente în sensul că există cel puțin un element nilpotent în* $\mathrm{Int}(\mathbf{J})$. *Atunci există un izomorfism izoton* f *al semigrupului* $(\mathbf{J}, F)$ *pe semigrupul* $(\mathbf{I}, F_0)$ *definit pe* $\mathbf{I} = [0, 1]$ *cu operația* $F_0(x, y) = \mathrm{Min}\ \{x + y, 1\}$ *adică* $f(F(x, y)) = F_0(f(x), f(y))$.

Teorema 1.1.4 implică teorema lui Mostert și Shields și reciproc, mai precis, teorema lui Faucett este echivalentă cu teorema lui Ling referitoare la semigrupuri propriu arhimediene iar teorema lui Mostert și Shields poate fi obținută din teorema lui Ling pentru semigrupuri impropriu arhimediene, aceasta din urmă oferind deci avantajul cuprinderii unitare a ambelor cazuri.

Se arată că orice semigrup arhimedian $(\mathbf{J}, F)$ poate fi caracterizat cu ajutorul unui șir de semigrupuri continue și strict crescătoare relativ la fiecare variabilă pe un interval deschis sau semideschis (numite [152] aczéliene) în sensul că pentru orice semigrup arhimedian $(\mathbf{J}, F)$ există un șir de semigrupuri $(\mathbf{J}, F_n)$ continue pe $\mathbf{J}$ și aczéliene pe $\mathrm{Int}(\mathbf{J})$ astfel încît să avem $\lim_{n \to \infty} F_n(x, y) = F(x, y)$, $(x, y) \in \mathbf{J} \times \mathbf{J}$.

În cazul slăbirii ipotezei a) avem

Teorema 1.1.6. *Fie* $F: [a, b) \times [a, b) \to [a, b)$ *o funcție asociativă care verifică condițiile:*

a') F *este discontinuă,*

b') F *este comutativă,*

c') F *este strict crescătoare în raport cu fiecare variabilă,*

d') *extremitatea* $a \in [a, b)$ *este element unitate pentru* $([a, b), F)$.

Atunci nu există nici o funcție strict monotonă $f: [a, b) \to [0, \infty)$ *astfel încît* F *să se reprezinte sub forma* $F(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$ *sau forma duală: dacă* $F: (a, b] \times (a, b] \to (a, b]$ *este o funcție asociativă, discontinuă, comutativă, strict crescătoare și* $b \in (a, b]$ *este element unitate pentru semigrupul* $((a, b], F)$, *atunci nu există nici o funcție strict monotonă* $f: (a, b] \to (-\infty, 0]$ *astfel încît* F *să admită reprezentarea de mai sus.*

Această teoremă are loc chiar și pentru grupuri.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. OBSERVAȚII PRIVIND APLICAREA TEOREMELOR DE REPREZENTARE LA STUDIUL t-NORMELOR ȘI t-CONORMELOR

Prin t-normă, în sensul utilizat de K. Menger [167], se înțelege orice funcție $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ care posedă proprietățile:

a) $T(a,b) \leqslant T(c, d)$ pentru $a \leqslant c$, $b \leqslant d$,

b) $T(a,b) = T(b, a)$ pentru orice $a, b \in [0, 1]$,

c) $T(1,1) = 1$,

d) $T(a,1) > 0$ pentru orice $a > 0$.

Forma generală a t-normei T a dus la unele dificultăți în construirea unei geometrii corespunzătoare și în special cu privire la convexitate și relația „între". De asemenea, dificultatea găsirii unui mod concret de construire a unei funcții T sau a unui criteriu de alegere a acesteia precum și o soluție, nu atît de satisfăcătoare, dată de A. Wald pentru inegalitatea triunghiului, au condus pe B. Schweizer și A. Sklar [233] la un studiu aprofundat al funcțiilor T, ei sugerînd cîteva funcții concrete T dintre care amintim:

$T_1)$ $T(a, b) = \text{Max}(a + b - 1, 0)$, adică $T_m = \text{Max}\ (\text{Sum}\ -1,\ 0)$,

$T_2)$ $T(a, b) = ab$, adică $T = \text{Prod}$,

$T_3)$ $T(a, b) = \text{Min}(a, b)$, adică $T = \text{Min}$,

$T_4)$ $T(a, b) = \text{Max}(a, b)$, adică $T = \text{Max}$,

$T_5)$ $T(a, b) = a + b - ab$, adică $T = \text{Sum} - \text{Prod}$,

$T_6)$ $T(a, b) = \text{Min}(a + b, 1)$, adică $T = \text{Min}(\text{Sum},\ 1)$,

$$T_w)\ T(a, b) = \begin{cases} a \text{ dacă } b = 1, \\ b \text{ dacă } a = 1, \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases}$$

Ei propun adăugarea proprietății de asociativitate pentru funcția T și înlocuirea condițiilor c) și d) prin c') $T(a, 1) = a$ pentru orice $a \in [0,1]$, [233], care este evident mai restrictivă. Peste tot unde nu se specifică altfel prin t-normă vom înțelege o funcție T cu aceste proprietăți restrictive. Dacă T este asociativă, comutativă, strict monotonă, continuă și cu proprietatea c'), atunci se numește *t-normă strictă*.

Aceste noi t-norme au permis o dezvoltare rapidă a teoriei structurilor probabiliste alături de așa numitele *t-conorme* S definite prin $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$, $x, y \in [0, 1]$. Acestea din urmă se folosesc, de obicei, cînd în locul funcțiilor de repartiție F se consideră funcțiile $G = 1 - F$.

Dacă o t-normă este continuă și verifică relația $T(x, x) < x$, pentru orice $x \in (0, 1)$, atunci se numește *arhimediană* și avem că orice t-normă strictă este arhimediană.

Dacă în mulțimea $\mathfrak{T}$ a tuturor t-normelor se introduce relația de ordine parțială „$\leqslant$" prin $T_i \leqslant T_j$ dacă pentru orice $x, y \in [0, 1]$, $T_i(x, y) \leqslant T_j(x, y)$. Vom avea că pentru orice $T \in \mathfrak{T}$, $T_w \leqslant T \leqslant \text{Min}$ și $T(0, a) = 0$, $a \in [0, 1]$.

Rezultatele din §1 se transpun la t-norme prin

Teorema 1.2.1. *Dacă T este o t-normă strictă, atunci există o funcție reală f, continuă și strict descrescătoare pe $(0, 1]$ cu $\lim\limits_{a \to 0^+} f(a) = \infty$, $f(1) = 0$ și astfel că pentru orice $x, y \in (0, 1]$ să avem $T(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$.*

Teorema 1.2.2. *Dacă T este o t-normă strictă atunci există o funcție reală h, continuă și strict crescătoare pe $[0, 1]$ cu proprietățile $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ și $T(x, y) = h^{-1}(h(x)h(y))$, $x, y \in [0, 1]$.*

Scanned with OKEN Scanner

Funcțiile f și h respectiv se numesc generatori aditivi respectiv generatori multiplicativi. O funcție T este o t-normă strictă dacă și numai dacă ea derivă din t-norma Prod din relația de mai sus.

O caracterizare generală a t-normelor arhimediene este dată de

Teorema 1.2.3. *Dacă T este o t-normă arhimediană, atunci există o funcție continuă și strict descrescătoare $f: [0, 1] \to [0, \infty]$ astfel încît T să se reprezinte sub forma $T(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$ unde $f^{(-1)}: [0, \infty] \to [0, 1]$ este pseudoinversa lui f și $f(1) = 0$.*

În mod analog avem și o versiune multiplicativă.

Particularizînd rezultatul din cazul semigrupurilor obținem că orice t-normă arhimediană T este limita unui șir punctual convergent de t-norme stricte.

Cu privire la $T = \text{Min}$ se poate arăta că nu există nici o funcție continuă sau strict descrescătoare $f: [0, 1] \to [0, \infty]$ astfel ca să avem reprezentarea $\text{Min}(x, y) = g(f(x) + f(y))$ unde g este un neutralizator la stînga pentru f (nu neapărat continuu, de exemplu, necrescător).

În afară de obținerea t-normelor cu ajutorul generatorilor avem și o altă cale și anume dacă T_1 și T_2 sînt două t-norme, $\lambda \in (0, 1)$, U_1 o aplicație definită pe $[0, \lambda) \times [0, \lambda)$ prin $U_1(x, y) = T_1\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)$ iar U_2 o aplicație definită pe $[\lambda, 1] \times [\lambda, 1]$ prin $U_2(x, y) = \lambda + (1 - \lambda)\, T_2\left(\frac{x - \lambda}{1 - \lambda}, \frac{y - \lambda}{1 - \lambda}\right)$, atunci aplicația T definită pe $[0, 1] \times [0, 1]$ prin

$$T(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{dacă } x \in [0, \lambda),\ y \in [0, \lambda), \\ x = \text{Min}(x, y) & \text{dacă } x \in [0, \lambda),\ y \in [\lambda, 1], \\ y = \text{Min}(x, y) & \text{dacă } x \in [\lambda, 1],\ y \in [0, \lambda), \\ U_2(x, y) & \text{dacă } x \in [\lambda, 1],\ y \in [\lambda, 1], \end{cases}$$

este o t-normă [240].

Pentru a da o caracterizare t-normelor continue, sugerată de raționamentul lui Mostert și Shields [178] care caracterizează toate semigrupurile continue pe $[0, 1]$ ce au pe zero ca anihilator iar pe 1 ca unitate, amintim că dacă $\mathbf{A}$ este o mulțime total ordonată și $(\mathbf{S}_a, \sigma_a)$, $a \in \mathbf{A}$, este o familie de semigrupuri disjuncte două cîte două, atunci se numește *suma ordinală a familiei* mulțimea $\mathbf{S} = \bigcup_{a \in \mathbf{A}} \mathbf{S}_a$ înzestrată cu operația

$$x \sigma y = \begin{cases} x \sigma_a y & \text{dacă pentru un } a \in \mathbf{A},\ x, y \in \mathbf{S}_a, \\ x & \text{dacă } x \in \mathbf{S}_a,\ y \in \mathbf{S}_b,\ a, b \in \mathbf{A},\ a < b, \\ y & \text{dacă } x \in \mathbf{S}_a,\ y \in \mathbf{S}_b,\ a, b \in \mathbf{A},\ a > b. \end{cases}$$

Se verifică ușor $(\mathbf{S}, \sigma)$ este semigrup și în plus avem

Teorema 1.2.4. [152], [139] *Orice t-normă continuă coincide sau cu t-norma* Min *sau cu suma ordinală a unei familii de semigrupuri arhimediene sau unipunctuale și reciproc.*

Alte rezultate privind determinarea t-normelor sau t-conormelor sînt prezentate în [235], [240], [139], [152], [250], [242], [55].

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

SEMIGRUPURI PE SPAȚIUL FUNCȚIILOR DE REPARTIȚIE

Se știe că abordarea structuralistă a unor clase de funcții oferă noi instrumente pentru o cunoaștere mai profundă a acestora. Cu toate că problema găsirii structurii semigrupurilor pe spațiul $\mathcal{R}$, al funcțiilor de repartiție asociate variabilelor aleatoare, este departe de a fi rezolvată, rezultatele privind semigrupul dat de convoluție [9], [150], [153], [154], [250], de convoluțiile generalizate [16], [285], [286], semigrupurile delphice [135], [136], [60] sau cele privind τ_T sau σ_C — structurile pe $\mathcal{R}$, introduse și studiate în [268], [269], [245], [247], [249], [250], [265], [81], [180], deschid perspectiva unor rezultate similare cu cel din [178] unde structura semigrupurilor pe $\mathbf{R}$ este complet rezolvată. Clasa funcțiilor sumă și a separatorilor asociați, introduse de O. Onicescu în lucrările sale care pun bazele unei teorii noi de o excepțională însemnătate în direcția găsirii căilor de eliminare a unor neajunsuri ale teoriei ansambliste, oferă o nouă viziune asupra principiilor fundamentale ale teoriei probabilităților.

§ 1. CLASE DE SEMIGRUPURI PE SPAȚIUL FUNCȚIILOR DE REPARTIȚIE

Noțiunea de „copulă" introdusă în [264], existența unor metrici clasice sau a altora noi, pe $\mathcal{R}$, noțiunea de funcție sumă și separator asociat [202], [205], [125], permit o abordare specială a structurilor algebrico-topologice pe $\mathcal{R}$ și a unor conexiuni dintre operațiile de pe mulțimea variabilelor aleatoare și cele de pe $\mathcal{R}$.

1.1. FUNCȚII SUMĂ, SEPARATORI, COPULE ȘI PROPRIETĂȚI ALE LOR

Se știe că în abordarea ansamblistă a teoriei probabilităților se asociază experiențelor aleatoare o mulțime abstractă Ω asimilată cu spațiul evenimentelor elementare pe ale cărei clase de părți se definesc anumite structuri printre care familia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ închisă în raport cu operația de complementarizare și față de reuniunile numărabile, numită σ-*corp* sau *corp borelian* pe Ω iar dubletul $(\Omega, \mathcal{K})$ se numește *cîmp de evenimente*.

În cazul cînd pe $\mathcal{K}$ s-a definit o aplicație P nenegativă, numărabil aditivă și normată prin $P(\Omega) = 1$ spunem că avem o *probabilitate* σ-*aditivă* iar $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se numește *cîmp de probabilitate*. Mărimile aleatoare $X: (\Omega, \mathcal{K}, P) \to \mathbf{R}^n$,

$\mathcal{K}$-măsurabile, se numesc *variabile aleatoare n-dimensionale* iar în cazul $n = 1$ se numesc variabile aleatoare reale a căror mulțime se notează prin $\mathcal{E}$ și respectiv $\mathcal{E}^n$. Multe dintre proprietățile acestora se exprimă cu ajutorul noțiunii de *funcție de repartiție* prin care se înțelege funcția F_X: $\bar{\mathbf{R}}^n \to \mathbf{R}$ dată prin $F_X(x_1, ..., x_n) = P(\{\omega: X_1(\omega) < x_1, ..., X_n(\omega) < x_n\})$ pentru orice $(x_1, ..., x_n) \in \bar{\mathbf{R}}^n$, în cazul n-dimensional, unde $X = (X_1, ..., X_n)$ și $F_X(x) = P(\{\omega: X(\omega) < x\})$, $x \in \bar{\mathbf{R}}$, în cazul variabilelor aleatoare reale.

Inconvenientul principal al modelării ansambliste a experiențelor aleatoare constă în absența semnificației fenomenologice a punctelor $\omega \in \Omega$ pentru care avem în general $P(\{\omega\}) = 0$ iar variabilele aleatoare care diferă numai pe o mulțime de măsură P-nulă, fiind echivalente, pierd din caracterul individual atît de mult dorit, lucrurile complicîndu-se și mai mult în cazul proceselor aleatoare. Evitarea acestor inconveniente nu poate fi făcută, după părerea acad. O. Onicescu, decît prin înlocuirea reprezentării ansambliste prin aceea care să aibă la bază cîmpul de evenimente ca algebră Boole, ca un sistem dirijat sau ca o latice distributivă și relativ complementată care cuprind mai bine bogata gamă de experiențe pe care le întîlnește știința actuală.

Definiția 2.1.1. Fiind dată o σ-algebră Boole Ω cu elementul unitate E și elementul nul $\varnothing$ și o probabilitate P pe Ω se numește *funcție sumă* pe Ω orice aplicație $F: \Omega \to \mathbf{R}$ aditivă și absolut continuă în raport cu probabilitatea P.

Evident că F este nulă pe evenimentele de probabilitate nulă și înlocuiește întreaga clasă de variabile aleatoare echivalente $X(\xi)$ fiind dată prin

$$F(\omega) = \int_{\omega} X(\xi)\, P(\mathrm{d}\xi)$$

pe cîmpul de probabilitate $(E, \mathcal{K}, P)$ pentru toate evenimentele pentru care integrala există. De asemenea avem

Teorema fundamentală (O. Onicescu [202], p. 112). *Pentru orice funcție sumă* $F(\omega)$, $\omega \in \Lambda$, Λ *fiind o sublatice proprie a cîmpului* $\mathcal{K} = \{\Omega\}$ *al laticei* σ*-aditive* $\mathcal{L}$, *definit de evenimentul neatomic* $\Omega \in \mathcal{L}(\{\Omega\} = \Omega \cap \mathcal{L})$, *și pentru orice* $a \in \mathbf{R}$, *există un eveniment* $\theta_a \in \mathcal{K}$ *pentru care* $F(\omega) - aP(\omega) < 0$ *petnru* $\omega < \theta_a$ *și* $F(\omega) - aP(\omega) \geqslant 0$ *pentru* $\omega < \theta_a'$ *unde* $\theta_a' = \Omega - \theta_a$ *iar* $P(\omega)$ *fiind probabilitatea condiționată de* Ω.

Definiția 2.1.2. Numim *separator*, pentru fiecare $a \in \mathbf{R}$, evenimentul care separă universurile $\{\omega\}$ din Λ (constituite din evenimentele subordonate lui ω) pentru care inegalitatea $F(\alpha) - aP(\alpha) < 0$ este verificată, de acelea pentru care inegalitatea nu este verificată.

Dacă notăm $\Phi(a) = P(\theta_a)$, se arată în [202] că Φ este nedescrescătoare, continuă la stînga, $\Phi(-\infty) = 0$ și $\Phi(\infty) = 1$, deci se poate da

Definiția 2.1.3. Se numește *funcție de repartiție asociată funcției sumă* F funcția $\Phi(a) = P(\theta_a)$.

Definiția 2.1.4. Se numește *funcție caracteristică asociată funcției* sumă F funcția $\varphi(t) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{ita}\, \mathrm{d}\Phi(a)$.

Separatorul θ_a, în cazul cînd F este dată cu ajutorul variabilei aleatoare X pe $(E, \mathcal{K}, P)$ este $\theta_a = \{\xi: X(\xi) - a < 0\}$ iar $\Phi(a) = P(\theta_a)$ este funcția de repartiție a variabilei aleatoare X. Aceste relații pun în valoare utilitatea familiei separatorilor $\{\theta_a\}_{a \in \mathbf{R}}$ care se poate organiza ca un spațiu vectorial σ-reticulat, cu element unitate [125] și care este folosită la reprezentarea func-

Scanned with OKEN Scanner

$\mathcal{K}$-măsurabile, se numesc *variabile aleatoare n-dimensionale* iar în cazul $n = 1$ se numesc variabile aleatoare reale a căror mulțime se notează prin $\mathcal{E}$ și respectiv $\mathcal{E}^n$. Multe dintre proprietățile acestora se exprimă cu ajutorul noțiunii de *funcție de repartiție* prin care se înțelege funcția F_X: $\bar{\mathbf{R}}^n \to \mathbf{R}$ dată prin $F_X(x_1, \ldots, x_n) = P(\{\omega: X_1(\omega) < x_1, \ldots, X_n(\omega) < x_n\})$ pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in \bar{\mathbf{R}}^n$, în cazul n-dimensional, unde $X = (X_1, \ldots, X_n)$ și $F_X(x) = P(\{\omega: X(\omega) < x\})$, $x \in \bar{\mathbf{R}}$, în cazul variabilelor aleatoare reale.

Inconvenientul principal al modelării ansambliste a experiențelor aleatoare constă în absența semnificației fenomenologice a punctelor $\omega \in \Omega$ pentru care avem în general $P(\{\omega\}) = 0$ iar variabilele aleatoare care diferă numai pe o mulțime de măsură P-nulă, fiind echivalente, pierd din caracterul individual atît de mult dorit, lucrurile complicîndu-se și mai mult în cazul proceselor aleatoare. Evitarea acestor inconveniențe nu poate fi făcută, după părerea acad. O. Onicescu, decît prin înlocuirea reprezentării ansambliste prin aceea care să aibă la bază cîmpul de evenimente ca algebră Boole, ca un sistem dirijat sau ca o latice distributivă și relativ complementată care cuprind mai bine bogata gamă de experiențe pe care le întîlnește știința actuală.

Definiția 2.1.1. Fiind dată o σ-algebră Boole Ω cu elementul unitate E și elementul nul $\varnothing$ și o probabilitate P pe Ω se numește *funcție sumă* pe Ω orice aplicație $F: \Omega \to \mathbf{R}$ aditivă și absolut continuă în raport cu probabilitatea P.

Evident că F este nulă pe evenimentele de probabilitate nulă și înlocuiește întreaga clasă de variabile aleatoare echivalente $X(\xi)$ fiind dată prin

$$F(\omega) = \int_{\omega} X(\xi)\, P(\mathrm{d}\xi)$$

pe cîmpul de probabilitate $(E, \mathcal{K}, P)$ pentru toate evenimentele pentru care integrala există. De asemenea avem

Teorema fundamentală (O. Onicescu [202], p. 112). *Pentru orice funcție sumă* $F(\omega)$, $\omega \in \Lambda$, Λ *fiind o sublatice proprie a cîmpului* $\mathcal{K} = \{\Omega\}$ *al laticei* σ*-aditive* $\mathcal{L}$, *definit de evenimentul neatomic* $\Omega \in \mathcal{L}(\{\Omega\} = \Omega \cap \mathcal{L})$, *și pentru orice* $a \in \mathbf{R}$, *există un eveniment* $\theta_a \in \mathcal{K}$ *pentru care* $F(\omega) - aP(\omega) < 0$ *petnru* $\omega < \theta_a$ *și* $F(\omega) - aP(\omega) \geqslant 0$ *pentru* $\omega < \theta_a'$ *unde* $\theta_a' = \Omega - \theta_a$ *iar* $P(\omega)$ *fiind probabilitatea condiționată de* Ω.

Definiția 2.1.2. Numim *separator*, pentru fiecare $a \in \mathbf{R}$, evenimentul care separă universurile $\{\omega\}$ din Λ (constituite din evenimentele subordonate lui ω) pentru care inegalitatea $F(\alpha) - aP(\alpha) < 0$ este verificată, de acelea pentru care inegalitatea nu este verificată.

Dacă notăm $\Phi(a) = P(\theta_a)$, se arată în [202] că Φ este nedescrescătoare, continuă la stînga, $\Phi(-\infty) = 0$ și $\Phi(\infty) = 1$, deci se poate da

Definiția 2.1.3. Se numește *funcție de repartiție asociată funcției sumă* F funcția $\Phi(a) = P(\theta_a)$.

Definiția 2.1.4. Se numește *funcție caracteristică asociată funcției sumă* F funcția $\varphi(t) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}\, \mathrm{d}\Phi(a)$.

Separatorul θ_a, în cazul cînd F este dată cu ajutorul variabilei aleatoare X pe $(E, \mathcal{K}, P)$ este $\theta_a = \{\xi: X(\xi) - a < 0\}$ iar $\Phi(a) = P(\theta_a)$ este funcția de repartiție a variabilei aleatoare X. Aceste relații pun în valoare utilitatea familiei separatorilor $\{\theta_a\}_{a \in \mathbf{R}}$ care se poate organiza ca un spațiu vectorial σ-reticulat, cu element unitate [125] și care este folosită la reprezentarea func-

Scanned with OKEN Scanner

țiilor sumă precum și în alte rezultate interesante obținute în [125] și [202]. Pornind de la simplitatea exprimării proceselor aleatoare și în special a celor de tip Markov [205] cu ajutorul funcțiilor sumă, în comparație cu cea obținută prin funcții aleatoare, apare evidentă importanța și perspectiva dezvoltării teoriei probabilităților în această nouă direcție în care școala românească, condusă de acad. O. Onicescu, a adus deja contribuții esențiale.

Definiția 2.1.5. Se numește *funcție de repartiție marginală* asociată vectorului aleator $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$, funcția $F_{X_{i_1} \ldots X_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = F_X(y_1, \ldots, y_n)$, unde $y_i = x_{i_s}$ pentru $i = i_s$ și $y_i = \infty$ dacă $i \neq i_s$, $1 \leqslant s \leqslant k$.

Mulțimea perechilor ordonate $\{((F_{X_1}(x), F_{X_2}(y)), F_X(x, y)), x, y \in \overline{\mathbf{R}}\}$ definește o funcție reală pe (Codom F_{X_1}) $\times$ (Codom F_{X_2}) adică avem

Lema 2.1.1. *Dacă X_1, X_2 sînt variabile aleatoare cu funcțiile de repartiție F_{X_1}, F_{X_2} și funcția de repartiție 2-dimensională $F_{X_1X_2} = F_X$, atunci există o funcție reală de 2 variabile, unică, $C^*_{X_1X_2}$, cu proprietățile*

Dom $C^*_{X_1X_2}$ = (Codom F_{X_1}) $\times$ (Codom F_{X_2}),

Codom $C^*_{X_1X_2}$ = Codom $F_{X_1X_2}$,

$F_{X_1X_2}(x, y) = C^*_{X_1X_2}(F_{X_1}(x), F_{X_2}(y))$ oricare ar fi $x, y \in \overline{\mathbf{R}}$.

Existența funcției $C^*_{X_1X_2}$ sugerează introducerea următoarelor definiții:

Definiția 2.1.6. Se numește *subcopulă* orice funcție C^* care posedă următoarele proprietăți

a) Dom $C^* = D_1 \times D_2$, D_1 și D_2 fiind submulțimi ale segmentului $[0, 1]$ care conțin pe 0 și 1,

b) $C^*(a, 0) = C^*(0, b) = 0$, pentru orice $a \in D_1$ și $b \in D_2$,

c) $C^*(a, 1) = a$, $C^*(1, b) = b$ pentru orice $a \in D_1$ și $b \in D_2$,

d) $C^*(a, b) - C^*(a, d) - C^*(c, b) + C^*(c, d) \geqslant 0$ cînd $a, c \in D_1$, $b, d \in D_2$, $a \leqslant c$ și $b \leqslant d$.

Definiția 2.1.7. Se numește *copulă* orice subcopulă al cărei domeniu coincide cu $[0, 1] \times [0, 1]$.

Vom avea

Lema 2.1.2. *Funcția $C^*_{X_1X_2}$ este o subcopulă. Ea este copulă atunci și numai atunci cînd* Codom F_{X_1} = Codom $F_{X_2} = [0, 1]$.

Lema 2.1.3. *Dacă C^* este o subcopulă atunci C^* este o funcție nedescrescătoare în fiecare variabilă,* Codom $C^* \subseteq [0, 1]$ *și este satisfăcută relația*

$|C^*(a, b) - C^*(c, d)| \leqslant |a - c| + |b - d|$ *pentru orice $a, c \in D_1$, $b, d \in D_2$, Deci C^* este o funcție continuă pe domneiul ei de definiție.*

Demonstrație. Dacă în relația d) din definiția subcopulei considerăm $a = 0$ obținem $C^*(c, d) \geqslant C^*(c, b)$ adică C^* este descrescătoare pentru c fixat, b și d arbitrare pe $[0, 1]$, $b \leqslant d$. În mod analog pentru $b = 0$ rezultă că $C^*(c, d) \geqslant C^*(a, d)$, oricare ar fi $a \leqslant c$ din $[0, 1]$ și d fixat. Din această monotonie și proprietatea c) din definiție rezultă Codom $C^* \subseteq [0, 1]$.

Pentru a justifica inegalitatea din ultima parte a lemei să observăm că din relația de definiție d) rezultă

$$C^*(a, b) - C^*(c, b) \geqslant C^*(a, d) - C^*(c, d)$$

pentru orice $a, c \in D_1$, $b, d \in D_2$ și $a \leqslant c$, $b \leqslant d$. Cum ambii membri ai acestei inegalități sînt negativi rezultă că

$$|C^*(a, b) - C^*(c, b)| \leqslant |C^*(a, d) - C^*(c, d)|$$

și deci

$$|C^*(a, b) - C^*(c, b)| \leqslant |C^*(a, 1) - C^*(c, 1)| \leqslant |a - c|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte putem scrie

$$|C^*(a, b) - C^*(c, d)| \leqslant |C^*(a, b) - C^*(c, b)| + |C^*(c, b) - C^*(c, d)| \leqslant |a - c| + |b - d|$$

ceea ce aveam de demonstrat.

Din această inegalitate sau din observația că

$$0 \leqslant C^*(a, b) - C^*(a, d) - C^*(c, b) + C^*(c, d) \leqslant 2 \operatorname{Min}(c - a, d - b)$$

rezultă continuitatea lui C^* pe domeniul său de definiție.

Următorul rezultat este fundamental pentru utilitatea copulelor.

Lema 2.1.4. *Orice subcopulă C^* admite o prelungire la o copulă C, în general prelungirea nefiind unică. Deci avem că*

$$C(x, y) = C^*(x, y) \text{ pentru orice } (x, y) \in \operatorname{Dom} C^*.$$

Demonstrație. Dacă $\operatorname{Dom} C^* = D_1 \times D_2$, conform lemei 2.1.3 rezultă că C^* se poate prelungi prin continuitate la o funcție $\bar{C}$ al cărui domeniu este $\bar{D}_1 \times \bar{D}_2$, $\bar{D}_1$ și $\bar{D}_2$ fiind respectiv închiderile domeniilor D_1 și D_2. Se verifică ușor că și $\bar{C}$ este o subcopulă.

Să prelungim funcția $\bar{C}$ la o funcție $C:[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ notînd mai întîi pentru orice $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$ prin $a_1 = \sup\{a' \in \bar{D}_1, a' \leqslant a\}$, $a_2 = \inf\{a'' \in \bar{D}_1, a \leqslant a''\}$, $b_1 = \sup\{b' \in \bar{D}_2, b' \leqslant b\}$, $b_2 = \inf\{b'' \in \bar{D}_2, b \leqslant b''\}$. Observăm că $a_1 = a = a_2$ dacă $a \in \bar{D}_1$ și $b_1 = b = b_2$ dacă $b \in \bar{D}_2$. Să introducem numerele

$$\lambda_1 = \begin{cases} \dfrac{a - a_1}{a_2 - a_1}, & \text{dacă } a_1 < a_2, \\ 1, & \text{dacă } a_1 = a_2; \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \dfrac{b - b_1}{b_2 - b_1}, & \text{dacă } b_1 < b_2, \\ 1, & \text{dacă } b_1 = b_2; \end{cases}$$

și să definim pe C prin

$$(1) \quad C(a, b) = (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)\bar{C}(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1\bar{C}(a_1, b_2) + \lambda_1(1 - \mu_1)\bar{C}(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1\bar{C}(a_2, b_2)$$

Este evident că $\operatorname{Dom} C = [0, 1] \times [0, 1]$ și

$$C(x, y) = \bar{C}(x, y) \text{ pentru orice } (x, y) \in \operatorname{Dom} \bar{C}.$$

De asemenea proprietățile b) și c) din definiția subcopulei sînt verificate. Pentru a arăta că și proprietatea d) este verificată, vom considera un alt punct $(c, d) \in [0, 1] \times [0, 1]$ cu $c \geqslant a$, $d \geqslant b$ și numerele c_1, d_1, c_2, d_2, λ_2, μ_2 care sînt legate de c și d prin relații asemănătoare cu cele ce leagă pe a_1, b_1, a_2, b_2, λ_1, μ_1 de a și b. Pentru prescurtarea scrierii vom nota

$$M(a, b; c, d) = C(a, b) - C(a, d) - C(c, b) + C(c, d)$$

cu indicii corespunzători pentru fiecare caz. Vom avea de considerat mai multe cazuri după cum a și c aparțin sau nu la același interval component al lui $[0, 1] - \bar{D}_1$ și b și d la același interval component al mulțimii $[0, 1] - \bar{D}_2$. Calculele fiind similare la majoritatea cazurilor, ne vom mărgini numai la

Scanned with OKEN Scanner

unul dintre acestea care este mai des implicat și anume cazul cînd $a<a_2\leqslant c_1<c$ și $b<b_2\leqslant d_1<d$ care este ilustrat în figura 1.

Aplicînd formula de definiție (1) a lui C pentru fiecare din cei patru termeni din relația de definiție a lui $M(a, b; c, d)$ și grupînd termenii în mod corespunzător vom obține

$$M(a, b; c, d) = (1 - \lambda_1)\,\mu_2 M(a_1, d_1; a_2, d_2) + \mu_2 M(a_2, d_1; c_1, d_2) +$$
$$+ \lambda_2\mu_2 M(c_1, d_1; c_2, d_2) + (1 - \lambda_1)\,M(a_1, b_2; a_2, d_1) +$$
$$+ M(a_2, b_2; c_1, d_1) + \lambda_2 M(c_1, b_2; c_2, d_1) +$$
$$+ (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)\,M(a_1, b_1; a_2, b_2) +$$
$$+ (1 - \mu_1)\,M(a_2, b_1; c_1, b_2) + \lambda_2(1 - \mu_1)\,M(c_1, b_1; c_2, b_2).$$

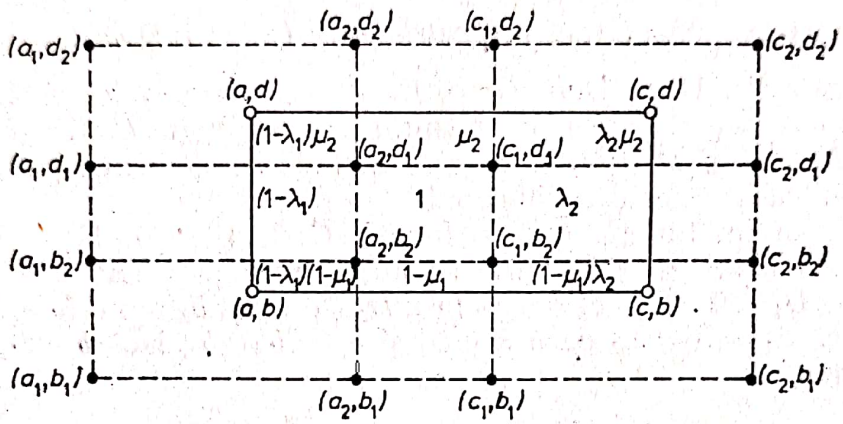


Fig. 1

Cum $\bar{C}$ este o subcopulă, partea dreaptă a acestei egalități este o combinație de termeni nenegativi, cu coeficienți nenegativi, deci obținem că $M(a, b; c, d) \geqslant 0$ și d) este demonstrată dacă procedăm la fel cu fiecare caz în parte. Cu aceasta lema este justificată și prezintă importanță îndeosebi prin următoarea consecință a ei

Teorema 2.1.1. *Fie X și Y două variabile aleatoare reale definite pe același cîmp probabilizat $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ avînd ca funcții de repartiție pe F_X și F_Y iar ca funcție de repartiție comună pe F_{XY}. Atunci există o copulă C_{XY} astfel încît să avem*

$$F_{XY}(x, y) = C_{XY}(F_X(x), F_Y(y)) \text{ pentru orice } x, y \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Dacă în plus Codom F_X = Codom F_Y = [0, 1], adică ambele funcții F_X și F_Y sînt continue pe $\overline{\mathbf{R}}$, atunci C_{XY} este unic determinată.

Reciproc, dîndu-se F_X și F_Y precum și o copulă C, funcția de două variabile definită mai sus prin intermediul lui C, F_X și F_Y este o funcție de repartiție 2-dimensională ale cărei funcții de repartiție marginle sînt F_X și F_Y.

Pentru orice două variabile aleatoare X și Y, funcția C_{XY} a cărei existență este asigurată prin teorema de mai sus se mai numește *copula de legătură a lui X și Y*.

Să observăm că unele proprietăți de la copule au fost întîlnite și la t-norme. Mai mult, avem că printre cele mai importante copule sînt t-normele

$$T_m(x, y) = \mathrm{Max}(x + y - 1, 0)$$
$$\mathrm{Prod}(x, y) = xy$$
$$\mathrm{Min}(x, y) = \text{minimum dintre } x \text{ și } y.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu toată asemănarea dintre t-norme și copule, mulțimile acestora nu coincid căci de exemplu copula

$$C(x, y) = xy + xy(1 - x)(1 - y), \quad x, y \in [0, 1]$$

nefiind asociativă, nu poate coincide cu o t-normă iar t-norma T_w nefiind continuă nu poate coincide cu o copulă.

Mai mult, vom avea

Teorema 2.1.2. *Orice copulă C satisface inegalitățile*

$T_m(x, y) \leqslant C(x, y) \leqslant \text{Min}(x, y)$ oricare ar fi $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Pe de altă parte, orice funcție C' definită pe $[0, 1] \times [0, 1]$ satisfăcînd condiția de mai sus precum și condiția d) *din definiția* 2.1.6. *este o copulă.*

Demonstrație. Fie C o copulă, atunci făcînd pe $c = d = 1$ în proprietatea c) și d) din definiția 2.1.6, obținem

$$C(a, b) - a - b + 1 \geqslant 0 \text{ sau } C(a, b) \geqslant a + b - 1.$$

Pe de altă parte avînd $C(x, y) \geqslant 0$ pentru orice $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ rezultă că $C(x, y) \geqslant T_m(x, y)$. În mod asemănător din proprietatea c) amintită și din lema 2.1.3 obținem

$$C(x, y) \leqslant C(x, 1) = x \text{ și } C(x, y) \leqslant C(1, y) = y$$

adică $C(x, y) \leqslant \text{Min}(x, y)$ ceea ce demonstrează prima parte a teoremei.

Pentru partea a doua a teoremei să observăm că atît T_m cît și Min verifică relațiile b) și c) din definiția 2.1.6 și deci rezultă că orice funcție C care verifică sistemul de inegalități, pe $[0,1] \times [0, 1]$, demonstrat în prima parte va păstra aceste proprietăți și teorema este complet demonstrată.

Se știe [235], din teoria despre t-norme, că anumite familii de generatori servesc ca familii de indicatoare în geometria lui Minkowski și, după cum se știe, convexitatea acestor indicatoare constituie o condiție necesară și suficientă pentru valabilitatea inegalității obișnuite a triunghiului. Apare natural întrebarea dacă proprietatea de convexitate nu are un rol semnificativ și în teoria t-normelor respectiv a spațiilor metrice probabiliste. Aceasta se pare că a fost ideea pe care A. Sklar [264] a pus-o la baza construirii conceptului de copulă reușind să dea o caracterizare a t-normelor care sînt copule [235], [240] cu ajutorul proprietății de convexitate a generatorului, dînd și o legătură între aspectul geometric și probabilist al spațiilor metrice statistice.

Această observație și teorema de mai sus, în special partea a doua, ne sugerează [235], [240] rezultate cu privire la reprezentarea copulelor dintre care amintim:

Teorema 2.1.3. *O t-normă care are un generator aditiv f coincide cu o copulă dacă și numai dacă f este o funcție convexă.*

Demonstrație. Înainte de a trece la demonstrație precizăm că aici prin noțiunea de funcție reală convexă pe un interval $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{R}$ vom înțelege acele funcții cu proprietatea că pentru orice pereche de puncte A, B de pe graficul G_f al lui f de abscise respectiv x' și x'', $x'' > x'$, porțiunea din grafic dintre A și B este situată sub graficul segmentului AB din dreapta $D(x)$ ce trece prin A și B (ordonatele lor verifică relațiile $f(x) \leqslant D(x)$, $x' \leqslant x \leqslant x''$). Aceasta se mai scrie sub formă analitică astfel:

$$f(tx' + (1 - t)x'') \leqslant tf(x') + (1 - t)f(x'')$$

oricare ar fi $x', x'' \in \mathbf{J}$, $x' < x''$ și orice număr $t \in [0, 1]$, $\mathbf{J}$ fiind intervalul de definiție al funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

Fie T o t-normă care admite un generator aditiv f și satisface inegalitatea

$$T(a, d) + T(c, b) \leqslant T(a, b) + T(c, d) \tag{2}$$

pentru orice a, b, c, d cu proprietățile $0 \leqslant a \leqslant c \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant d \leqslant 1$. Să luăm $a', b' \in [0, 1]$, atunci dacă notăm prin $u = f^{(-1)}\left(\frac{1}{2} f(a')\right)$ și $v = f^{(-1)}\left(\frac{1}{2} f(b')\right)$ avem că $a' = f^{(-1)}(2f(u))$ și $b' = f^{(-1)}(2f(v))$. Rezultă că $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1$ și este verificată inegalitatea (2) de mai sus obținînd

$$T(u, v) + T(v, u) \leqslant T(u, u) + T(v, v).$$

Aplicînd apoi teorema de reprezentare putem scrie că $T(u, u) = f^{(-1)}(2f(u))$, $T(v, v) = f^{(-1)}(2f(v))$ iar $T(u, v) = T(v, u) = f^{(-1)}(f(u) + f(v))$ ceea ce conduce la relațiile

$$2f^{(-1)}(f(u) + f(v)) \leqslant f^{(-1)}(2f(u)) + f^{(-1)}(2f(v)) = a' + b'.$$

Prin urmare avem

$$\frac{1}{2}(a' + b') \geqslant f^{(-1)}(f(u) + f(v)) = f^{(-1)}\left(\frac{1}{2} f(a') + \frac{1}{2} f(b')\right)$$

iar din monotonia descrescătoare a lui f deducem

$$f\left(\frac{a' + b'}{2}\right) \leqslant \frac{f(a') + f(b')}{2}.$$

Rezultă deci că f este o funcție convexă în sensul lui Jensen pe $[0, 1]$ și fiind continuă deducem că f este convexă [194].

Să demonstrăm acum implicația inversă prevăzută în teoremă. Pentru aceasta amintim mai întîi că dacă $\mathbf{J}$ este un interval din $\mathbf{R}$, $f: \mathbf{J} \to \mathbf{R}$ o funcție strict descrescătoare și convexă atunci f^{-1} este o funcție convexă. Pornind de la definiția lui $f^{(-1)}$ ca o extensie proprie a lui f^{-1} cînd $0 < f(0) = b_0 < \infty$ rezultă ușor din modul cum este definită, că $f^{(-1)}$ păstrează proprietatea de convexitate de la f^{-1}, $f^{(-1)} \circ f = \varphi_{[0,1]}$ iar $f \circ f^{(-1)} = \varphi_{\text{Codom } f}$, φ_A reprezentînd restricția funcției identice la mulțimea A.

Cu aceste precizări putem scrie că pentru orice $t \in (0, 1)$ și orice $x, y \in \mathbf{R}$ avem inegalitatea

$$f^{(-1)}(tx + (1 - t)y) \leqslant tf^{(-1)}(x) + (1 - t) f^{(-1)}(y)$$

$$f^{(-1)}((1 - t)\, x + ty) \leqslant (1 - t) f^{(-1)}(x) + tf^{(-1)}(y)$$

care prin adunarea termenilor corespunzători conduce la inegalitatea

$$f^{(-1)}(tx) + (1 - t)\, y) + f^{(-1)}((1 - t)\, x + ty) \leqslant f^{(-1)}(x) + f^{(-1)}(y). \tag{3}$$

Fie a, b, c, d numere arbitrare din $[0, 1]$ cu proprietățile $0 \leqslant a \leqslant c \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant d \leqslant 1$ și fie $u = f(a)$, $v = f(b)$, $s = f(c)$, $r = f(d)$. Cum f este descrescătoare rezultă că avem $s \leqslant u$, $r \leqslant v$ deci sînt posibile două cazuri: 1) $s < u$ sau $r < v$ sau ambele și 2) $s = u$ și $r = v$. În primul caz vom nota respectiv $x =$

Scanned with OKEN Scanner

$= u + v$, $y = s + r$ și vom substitui în inegalitatea (3) de mai sus care devine

$$(4) \quad f^{(-1)}(t(u+v) + (1-t)(s+r)) + f^{(-1)}((1-t)(u+v) + t(s+r)) \leqslant f^{(-1)}(u+v) + f^{(-1)}(s+r)$$

Alegînd pe $t = \dfrac{u-s}{u-s+v-r}$ deducem pe $1-t$ și făcînd calculele în inegalitatea (4) aceasta se reduce la

$$f^{(-1)}(u+r) + f^{(-1)}(s+v) \leqslant f^{(-1)}(u+v) + f^{(-1)}(s+r)$$

care și în cazul al doilea cînd $s = u$ și $r = v$ rezultă în mod banal. Obținem astfel că această ultimă inegalitate este îndeplinită pentru orice $s \leqslant u$, $r \leqslant v$. Această inegalitate este echivalentă cu

$$f^{(-1)}(f(a) + f(d)) + f^{(-1)}(f(c) + f(b)) \leqslant f^{(-1)}(f(a) + f(b)) + f^{(-1)}(f(c) + f(d))$$

care cu ajutorul teoremei de reprezentare conduce la relația (2) din teoremă a cărei demonstrație este astfel încheiată.

Corolar. *Dacă un generator aditiv al unei t-norme T este o funcție convexă atunci t-norma T nu este mai slabă decît T_m.*

Să observăm că teoremele de reprezentare analizate în Capitolul I vor fi utile în studiul unei clase importante de copule ce satisfac ecuația asociativității

$$C(C(x, x_2), x_3) = C(x_1, C(x_2, x_3)) \text{ pentru orice } x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]$$

numite *copule asociative.*

Evident că se poate introduce și noțiunea de *copulă arhimediană* înțelegînd prin aceasta orice copulă asociativă care posedă proprietatea

$$C(x, x) < x \text{ pentru orice } x \in (0, 1)$$

adică acelea care definesc un semigrup $([0, 1], C)$ fără elemente idempotente în interior. O copulă se numește *strictă* dacă ea este strict crescătoare pe $[0, 1] \times [0, 1]$. Se poate arăta că orice copulă strictă este arhimediană însă afirmația reciprocă nu este adevărată căci de exemplu copula $C_m = T_m$ este arhimediană dar nu este strictă.

Sintetizînd rezultatele cu privire la reprezentarea funcțiilor asociative (capitolul I) deducem pentru copule

Teorema 2.1.4. *Pentru orice copulă arhimediană există o funcție strict descrescătoare și convexă* (deci continuă) $f: [0, 1] \to [0, \infty]$ *cu proprietatea* $f(1) = 0$ *și astfel încît să avem*

$$(5) \quad C(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) \text{ pentru orice } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

$f^{(-1)}$ fiind pseudoinversa lui f (adică $f^{(-1)} = f^{-1}$ pe $[0, f(0)]$ și $f^{(-1)}(x) = 0$ pentru $x \in [f(0), \infty]$).

Reciproc, dacă $f: (0, 1] \to [0, \infty)$ este strict descrescătoare, convexă și cu proprietatea că $f(1) = 0$ iar $f^{(-1)}$ este pseudoinversa lui f, atunci funcția $C: (0, 1] \times (0, 1]$ prin relația (5) și prelungită prin continuitate la $[0, 1] \times [0, 1]$ este o copulă arhimediană.

Corolar. *Orice copulă arhimediană este simetrică, adică* $C(x, y) = C(y, x)$ *pentru orice* $x, y \in [0, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

Funcțiile f sau $f^{(-1)}$ se numesc generatori aditivi pentru copula C. De obicei f se numește generator interior iar $f^{(-1)}$ generator exterior (aceasta fiind o funcție necrescătoare, convexă, $f^{(-1)}:[0, \infty] \to [0, 1]$ cu $f(0) = 1$ și $f(\infty) = 0$).

Două funcții f_1 și f_2 (respectiv $f_1^{-1)}$ și $f_2^{(-1)}$) generează aceeași copulă dacă și numai dacă $f_1(y) = kf_2(y)$ (respectiv $f_1^{(-1)}(x) = f_2^{-1}(kx)$) pentru un $k \in (0, \infty)$.

O copulă este strictă dacă și numai dacă ea admite un generator aditiv f pentru care $f(0) = +\infty$ căci atunci f este strict descrescătoare.

Utilizînd teoremele de reprezentare împreună cu rezultatele lui Mostert și Shields [178] ce permit o caracterizare a t-normelor continue cu ajutorul sumei ordinale de semigrupuri arhimediene sau unipunctuale (vezi cap. I, § 3) se poate obține și pentru copule un rezultat similar. Faptul că suma ordinală de copule asociative este o copulă asociativă se verifică ușor prin calcul. Afirmația reciprocă fiind mai importantă, amintim

Teorema 2.1.5. *Dacă C este o copulă asociativă, atunci*

a) $C(x, x) = x$ *pentru orice* $x \in [0, 1]$ *dacă și numai dacă* $C = \text{Min}$.

b) $C(x, x) < x$ *pentru orice* $x \in (0, 1)$ *dacă și numai dacă C este arhimediană și fiecare generator exterior al său este o funcție convexă.*

c) $C(x, x) < x$ *pentru anumite valori ale lui* $x \in (0, 1)$, *dar nu pentru orice* $x \in (0, 1)$, *dacă și numai dacă C este o sumă ordinală de copule arhimediene, adică de funcții arhimediene cu generatori exteriori funcții convexe.*

Corolar. *Orice copulă asociativă este simetrică.*

În ultima parte a acestui paragraf vom expune pe scurt cele mai reprezentative rezultate privind cazurile vectoriale cu $n > 2$, $n \in \mathbf{N}$ prin analogie cu cele obținute pentru $n = 2$. Ca o modificare neesențială în cele ce urmează vom renunța la cerința de continuitate a unei funcții de repartiție unidimensionale la $-\infty$ și la $+\infty$ și analog pentru cele n-dimensionale.

Fie $n \geqslant 1$, $n \in \mathbf{N}$. Prin *n-interval*, notat uneori prin $\mathbf{J}_n = [(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)]$, $x_m \leqslant y_m$ pentru orice $m \leqslant n$, vom înțelege produsul cartezian a n-intervale închise $[x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$. În cazul $x_m = 0$, $y_m = 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$ se obține n-cubul $[0, 1]^n$ iar n-spațiul extins $\overline{\mathbf{R}}^n$ se obține pentru $x_m = -\infty$, $y_m = +\infty$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Prin vîrfurile n-intervalului $[(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)]$ vom înțelege cele 2^n n-uple $(z_1, \ldots, z_n)$ astfel că fiecare z_m este egal cu x_m sau y_m, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Fiind dată o funcție reală de n variabile G al cărui domeniu de definiție Dom G conține un n-interval $\mathbf{J}_n$, se numește *G-volum* al lui $\mathbf{J}_n$ suma

$$\mathbf{V}_G(\mathbf{J}_n) = \sum \alpha(z_1, \ldots, z_n)\, G(z_1, \ldots, z_n)$$

în care sumarea se ia după cele 2^n vîrfuri $(z_1, \ldots, z_n)$ ale lui $\mathbf{J}_n = [(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)]$ și avem

$$\alpha(z_1, \ldots, z_n) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } z_m = x_n \text{ pentru un număr par de valori ale lui } m \\ -1 \text{ dacă } z_m = x_m \text{ pentru un număr impar de valori ale lui } m \end{cases}$$

Rezultă că $\mathbf{V}_G(\mathbf{J}_n) = 0$ dacă $\mathbf{J}_n$ este degenerat, adică cel puțin două vîrfuri coincid.

Vom spune că G este *n-crescătoare* dacă $\mathbf{V}_G(\mathbf{J}_n) \geqslant 0$ pentru orice n-interval $\mathbf{J}_n$ ale cărui vîrfuri aparțin domeniului lui G. Observăm că $\mathbf{V}_G(\mathbf{J}_n)$ pentru $n = 2$ este expresia condiției d) a definiției 2.1.6. deci exprimă un anume fel de monotonie nedescrescătoare în cazul n-dimensional.

Scanned with OKEN Scanner

Cu această terminologie putem da o formă echivalentă (excepție făcînd continuitatea la $+\infty$ și $-\infty$) cu definiția 2.1.4 și anume:

Definiția 2.1.8. Se numește funcție de repartiție n-dimensională orice funcție de n variabile $G:\bar{\mathbf{R}}^n \to [0, 1]$ și care satisface următoarele proprietăți:

a') $G(+\infty, ..., +\infty) = 1$,

b') $G(x_1, ..., x_n) = 0$ dacă $x_m = -\infty$ pentru cel puțin un $m \leqslant n$,

c') G este n-crescătoare.

Noțiunea de funcție 1-marginală asociată, F_m, lui G este cea amintită anterior, $F_m(x_m) = G(+\infty, ..., +\infty, x_m, +\infty, ..., +\infty)$.

Din b') și c') rezultă că o funcție de repartiție n-dimensională în sensul definiției 2.1.8 este nedescrescătoare în raport cu fiecare dintre variabilele sale și orice funcție 1-marginală a sa este o funcție de repartiție obișnuită 1-dimensională.

De asemenea avem

Definiția 2.1.9. Se numește *copulă n-dimensională* sau *n-copulă* orice funcție reală $C:[0, 1]^n \to \mathbf{R}$ cu Codom $C = [0, 1]$ și care satisface în plus condițiile:

c_1) $C(1, ..., 1, x_m, 1, ..., 1) = x_m$ pentru fiecare $1 \leqslant m \leqslant n$ și orice $x_m \in [0, 1]$,

c_2) $C(x_1, ..., x_n) = 0$ dacă $x_m = 0$ cel puțin pentru un $m \leqslant n$,

c_3) C este n-crescătoare.

Rezultă din c_1) și c_2) că există o singură 1-copulă care coincide cu funcția identică pe $[0, 1]$ (adică $C(x) = x$) și că orice n-copulă este nedescrescătoare în raport cu fiecare variabilă și continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale. Orice n-copulă C definește o măsură Lebesgue-Stieltjes μ_C pe $[0, 1]^n$ cu $\mu_C([0, 1]^n) = 1$.

Teorema 2.1.6. *Fie $n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$ și G o funcție de repartiție n-dimensională ale cărei funcții de repartiție 1-marginale sînt $F_1, ..., F_n$. Atunci există o n-copulă C astfel încît*

$$G(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)) \tag{6}$$

pentru orice n-uplu $(x_1, ..., x_n) \in \bar{\mathbf{R}}^n$. Reciproc, dacă C este o n-copluă și $(F_1, .., F_n)$ un n-uplu de funcții de repartiție 1-dimensionale iar G o funcție de n-variabile definită prin relația (6), atunci G este o funcție de repartiție n-dimensională avînd ca funcții 1-marginale chiar funcțiile $F_1, ..., F_n$.

Corolar. *Fie $X_1, .., X_n$ variabile aleatoare reale definite pe același cîmp probabilizat $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Dacă $F_1, ..., F_n$ sînt funcțiile de repartiție asociate acestor variabile aleatoare iar G este funcția de repartiție n-dimensională asociată n-uplului dat, atunci F_m este funcția de repartiție 1-marginală corespunzătoare variabilei X_m, $1 \leqslant m \leqslant n$ și există o n-copulă C (numită copulă de legătură a variabilelor aleatoare $X_1, ..., X_n$) astfel înclt relația (6) este adevărată pentru orice $(x_1, ..., x_n) \in \bar{\mathbf{R}}^n$. Dacă fiecare F_m, $1 \leqslant m \leqslant n$, este continuă, atunci copula de legătură C a variabilelor aleatoare $X_1, ..., X_n$ este unică.*

Demonstrația teoremei 2.1.6 rezultă din următoarele leme formulate pentru n fixat, $n \geqslant 2$ și G o funcție de repartiție n-dimensională avînd funcțiile 1-marginale respectiv egale cu $F_1, ..., F_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Lema 2.1.5. *Fie* i, j numere întregi, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ și x_i, y_i, x_j, y_j *elemente din* $\overline{\mathbf{R}}$ *cu proprietățile* $x_i \leqslant y_i$, $x_j \leqslant y_j$ *iar* $z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n$ *elemente arbitrare din* $\overline{\mathbf{R}}$. *Atunci avem*

$$G(z_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, z_n) - G(z_1, \ldots, x_i, \ldots, y_j, \ldots, z_n) -$$

$$- G(z_1, \ldots, y_i, \ldots, x_j, \ldots, z_n) + G(z_1, \ldots, y_i, \ldots, y_j, \ldots, z_n) \geqslant 0.$$

Lema 2.1.6. *Fie* $m \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant m \leqslant n$ *și* $x_m, y_m, z_1, \ldots, z_{m-1}, z_{m+1}, \ldots z_n$ *elemente arbitrare din* $\overline{\mathbf{R}}$, *atunci avem*

$$|G(z_1, \ldots, z_{m-1}, x_m, z_{m+1}, \ldots, z_n) -$$

$$- G(z_1, \ldots, z_{m-1}, y_m, z_{m+1}, \ldots, z_n)| \leqslant |F_m(x_m) - F_m(y_m)|.$$

Lema 2.1.7. *Fie* $(x_1, \ldots, x_n)$ *și* $(y_1, \ldots, y_n)$ *două n-uple arbitrare din* $\overline{\mathbf{R}}^n$, *atunci vom avea*

$$|G(x_1, \ldots, x_n) - G(y_1, \ldots, y_n)| \leqslant |F_1(x_1) - F_1(y_1)| + \ldots + |F_n(x_n) - F_n(y_n)|.$$

Lema 2.1.8. *Mulțimea perechilor*

$((F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)), G(x_1, \ldots, x_n))$ *oricare ar fi* $(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbf{R}}^n$ *reprezintă graficul unei funcții reale de n variabile* C^* *cu proprietățile*

$\operatorname{Dom} C^* = \operatorname{Codom} F_1 \times \ldots \times \operatorname{Codom} F_n$, $\operatorname{Codom} C^* = \operatorname{Codom} G \subseteq [0, 1]$ *adică avem*

$G(x_1, \ldots, x_n) = C^*(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n))$ *pentru orice* $(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$

Lema 2.1.9. *Funcția* C^* *din lema* 2.1.8 *poate fi extinsă (în general neunic) la o n-copulă* C. *Dacă* $\operatorname{Codom} F_m = [0, 1]$ *pentru orice* m, $1 \leqslant m \leqslant n$ *(adică fiecare* F_m *este continuă), atunci* $C^* = C$ *și* C *este unică.*

Un rezultat cunoscut sub denumirea de teorema fundamentală de consistență a lui Kolmogorov [144] ne permite să dăm

Teorema 2.1.7. *Fie* C *o n-copulă și* $(F_1, \ldots, F_n)$ *un n-uplu de funcții de repartiție unidimensionale. Atunci există un cîmp probabilizat și variabilele aleatoare reale cu valori în* $\overline{\mathbf{R}}$, $X_1, \ldots, X_n$ *definite pe acest cîmp astfel încît* C *este o copulă de legătură a variabilelor aleatoare* $X_1, \ldots, X_n$ *iar* F_m, $1 \leqslant m \leqslant n$ *este funcția de repartiție corespunzătoare lui* X_m, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Amintim că fiind dată o funcție reală T, de două variabile, se numește șirul iteratelor lui T, notate prin T^n, șirul de funcții definite prin relația de recurență $T^1 = T$, $T^n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = T(T^{n-1}(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$ pentru $n \geqslant 2$. Deci pentru orice $n \geqslant 2$ avem că T^{n-1} este o funcție reală de n variabile.

Cu aceste notații putem da

Teorema 2.1.8. *Dacă* $n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$, *atunci* $\operatorname{Prod}^{n-1}$ *și* Min^{n-1} *sînt fiecare n-copule iar* T_m^{n-1} *este o n-copulă dacă și numai dacă* $n = 2$. *Orice n-copulă* C *satisface inegalitățile*

$$T_m^{n-1} \leqslant C \leqslant \operatorname{Min}^{n-1}$$

inegalitatea din partea stîngă fiind cea mai bună posibilă în sensul că pentru fiecare n-uplu $(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$ *există o n-copulă* C_1 *astfel încît să avem* $C_1(x_1, \ldots, x_n) = T_m^{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dintre rezultatele privind n-copulele și variabilele aleatoare amintim o relație echivalentă cu cea din definiția independenței variabilelor aleatoare și anume

Teorema 2.1.9. *Fie n un întreg, $n \geqslant 2$ și $X_1, \ldots, X_n$ variabile aleatoare ale căror funcții de repartiție sînt continue. Variabilele aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ sînt independente dacă și numai dacă copula lor de legătură este* Prod^{n-1}.

Justificarea rezultă din faptul că prin definiție o familie de variabile aleatoare $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ definite pe același cîmp probabilizat este o *familie de variabile aleatoare independente* dacă pentru orice parte finită $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ și orice părți boreliene $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{J}} \subseteq \mathbf{R}$, avem

$$P(\bigcap_{\alpha \in \mathbf{J}} X_\alpha^{-1}(B_\alpha)) = \prod_{\alpha \in \mathbf{J}} P(X_\alpha^{-1}(B_\alpha)).$$

Se poate demonstra [197], [102] că $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ este o familie de variabile aleatoare independente dacă și numai dacă

$$F_{X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_n}}(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) = F_{X_{\alpha_1}}(x_{\alpha_1}) \ldots F_{X_{\alpha_n}}(x_{\alpha_n})$$

pentru orice $\mathbf{J} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathbf{I}$, $(x_{\alpha_i})_{\alpha_i \in \mathbf{J}} \subseteq \mathbf{R}$.

Din ipoteza că F_{X_m}, $1 \leqslant m \leqslant n$, sînt continue rezultă că există o n-copulă unică și cum Prod^{n-1} satisface aceste condiții teorema este demonstrată. De altfel această n-copulă determină tabloul de corelație ale celor n variabile aleatoare independente.

Teorema de mai sus reduce problema pusă de M. Fréchet [82] la problema caracterizării n-copulelor.

Alte rezultate cu privire la sistemele finite de variabile aleatoare reale sînt date de

Teorema 2.1.10. *Fie $n \in \mathbf{N}$ și $X_1, \ldots, X_n$ ca și în teorema 2.1.9. Atunci orice subsistem de $n-1$ elemente ale sistemului $X_1, \ldots, X_n$ este un sistem de variabile aleatoare independente dacă și numai dacă copula de legătură C a variabilelor aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ satisface inegalitățile*

$$\mathrm{Prod}^{n-1}(x_1, \ldots, x_n) -$$

$$- \mathrm{Prod}^{n-1}(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n) \leqslant C(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \mathrm{Prod}^{n-1}(x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ \mathrm{Min}\,(x_1(1 - x_2) \ldots (1 - x_n), \ldots, (1 - x_1) \ldots (1 - x_{n-1})x_n)$$

pentru orice n par și

$$\mathrm{Prod}^{n-1}(x_1, \ldots, x_n) - \mathrm{Min}\,(x_1(1 - x_2) \ldots (1 - x_n), \ldots, (1 - x_1) \ldots (1 - x_{n-1})x_n) \leqslant$$

$$\leqslant C(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \mathrm{Prod}^{n-1}(x_1, \ldots, x_n) + \mathrm{Prod}^{n-1}(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n)$$

pentru n impar.

Înainte de a formula rezultatele care urmează să amintim că o anumită proprietate cu privire la funcțiile $X:(\Omega, \mathcal{K}, P) \to \mathbf{R}$ se zice că este verificată a.p.t. dacă mulțimea punctelor $\omega \in \Omega$ unde această proprietate nu este verificată are probabilitatea nulă.

Teorema 2.1.11. *Fie $n \in \mathbf{N}$ și $X_1, \ldots, X_n$ ca și în teorema 2.1.9. Atunci fiecare din variabilele aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ este dată de o funcție crescătoare a.p.t. de oricare dintre celelalte dacă și numai dacă copula lor de legătură este* Min^{n-1}. *În particular, dacă X_1 și X_2 sînt variabile aleatoare pentru care funcțiile de*

Scanned with OKEN Scanner

repartiție corespunzătoare F_{X_1}, F_{X_2} sînt continue, atunci $X_1 = X_2$ a.p.t. dacă și numai dacă $F_{X_1} = F_{X_2}$ și copula de legătură a lui X_1 și X_2 este Min.

Corolar *Dacă $X_1, \ldots, X_n$ sînt toate funcții strict crescătoare sau toate funcții strict descrescătoare pe $\Omega = [0, 1]$ înzestrat cu probabilitatea $P =$ măsura Lebesgue, atunci singura copulă de legătură a variabilelor $X_1, \ldots, X_n$ este* Min^{n-1}.

Teorema 2.1.12. *Fie X_1, X_2 variabile aleatoare reale cu funcțiile de repartiție F_{X_1}, F_{X_2} continue. Atunci X_1 și X_2 sînt date fiecare de o funcție descrescătoare a.p.t. de cealaltă variabilă aleatoare dacă și numai dacă copula de legătură a lui X_1 și X_2 este T_m. În particular $X_1 + X_2 = c$ a.p.t., unde c este o constantă reală, dacă și numai dacă $F_{X_1}(x) + F_{X_2}(c - x) = 1$ pentru orice $x \in \overline{\mathbf{R}}$ și copula de legătură a lui X_1 și X_2 este T_m.*

Corolar *Dacă X_1 este o funcție strict crescătoare și X_2 este o funcție strict descrescătoare pe $\Omega = [0, 1]$ înzestrat cu probabilitatea $P =$ măsura Lebesgue, atunci singura copulă de legătură a lui X_1 și X_2 este T_m.*

Cu privire la iteratele unei copule arhimediene avem

Teorema 2.1.13. *Dacă C este o 2-copulă arhimediană iteratele sale C^{n-1} sînt n-copule pentru orice $n \geqslant 2$ dacă și numai dacă există un generator exterior g al lui C care este complet monoton, adică dacă și numai dacă g este o funcție analitică care satisface condițiile*

$$(-1)^n g^{(n)} \geqslant 0 \quad \textit{pentru orice } n \geqslant 0.$$

Acest rezultat a fost ulterior extins și aplicat la mulțimi admisibile (sau exchangeable) de variabile aleatoare [140] dîndu-se o interpretare probabilistă pentru complet monotonie.

Dacă un generator exterior al unei copule C este complet monoton atunci toți generatorii exteriori au această proprietate iar C satisface inegalitățile: $\text{Prod} \leqslant C \leqslant \text{Min}$.

În încheierea acestor considerații privind n-copulele să facem observația că ele în general au o structură mai simplă decît funcțiile de repartiție. Pentru a utiliza această simplicitate să introducem noțiunea de quasi-inversă a unei funcții monotone.

Fie f o funcție monotonă de o variabilă reală. Să adăugăm la mulțimea punctelor $(x, f(x)$ mulțimea punctelor ce aparțin segmentelor închise de forma $(x, f(x+))$, $(x, f(x-))$. Construim simetricul față de dreapta $y = x$ al graficului astfel completat apoi eliminăm din graficul obținut prin acest procedeu toate segmentele verticale exceptînd un singur punct (arbitrar) din fiecare dintre ele. Orice grafic rezultat în final poate fi considerat ca graficul unei noi funcții care se spune că reprezintă o quasi-inversă a funcției inițiale f.

Conform acestei construcții rezultă că orice funcție de repartiție unidimensională F posedă cel puțin o quasi-inversă F^*, definită și nedescrescătoare pe $[0, 1]$ și care ia valori finite pe intervalul deschis $(0, 1)$. Printre quasi-inversele oricărei funcții de repartiție există una continuă la stînga pe $(0, 1)$ și continuă în 0 și 1. Rezultă că avem

Teorema 2.1.14. *Fie H_n o funcție reală de n variabile, integrabilă pe $\overline{\mathbf{R}}^n$ în raport cu o funcție de repartiție n-dimensională G_n. Fie C_n o n-copulă pentru care avem*

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = C_n(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n))$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *sînt funcțiile de repartiție 1-marginale corespunzătoare lui* G_n. *Atunci avem că*

$$\int \ldots \int_{\mathbf{R}^n} H_n(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}G_n(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \int \ldots \int_{[0,1]^n} H_n(F_1^*(u_1), \ldots, F_n^*(u_n))\, \mathrm{d}C_n(u_1, \ldots, u_n).$$

Expresia din membrul drept al formulei de mai sus poate fi mult mai simplă decît cea din membrul stîng. De exemplu dacă C_n este absolut continuă, cum este cazul $C_n = \mathrm{Prod}^{n-1}$ sau în cazul $n = 2$ dacă luăm $C_2 = T_m$ sau $C_2 = \mathrm{Min}$, se justifică această afirmație. În mod asemănător rezultă și pentru cazul $n = 3$ și $C_3 = \mathrm{Min}^2$.

1.2. METRICI ȘI TOPOLOGII PE SPAȚIUL FUNCȚIILOR DE REPARTIȚIE SAU PE SPAȚIUL VARIABILELOR ALEATOARE

Pornind de la importanța variabilelor asociate unui cîmp probabilizat și a funcțiilor de repartiție corespunzătoare în studiul fenomenelor aleatoare și, în general, în teoria probabilităților, este natural ca un loc de seamă să-l ocupe problema înzestrării acestor mulțimi de funcții cu diferite structuri semimetrice, metrice sau în general topologice. Desigur că acestea vor permite abordarea analitică mai completă în special a problemelor legate de șiruri și serii de variabile aleatoare care ocupă un loc central în analiza probabilistă.

Definiția 2.1.10. Fie S o mulțime arbitrară și d o funcție definită pe $S \times S$ cu valori în $\mathbf{R}$ și care pentru orice $x, y, z \in S$ posedă următoarele proprietăți:

$\mathrm{d}_1)$ $d(x, y) \geqslant 0$,

$\mathrm{d}_2)$ $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$,

$\mathrm{d}_3)$ $d(x, y) = d(y, x)$,

$\mathrm{d}_4)$ $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inegalitatea triunghiului).

Funcția d se numește *metrică* sau *funcție distanță*, numărul $d(x, y)$ este distanța dintre x și y iar perechea (S, d) se numește *spațiu metric*.

Dacă proprietatea $\mathrm{d}_2)$ se înlocuiește cu $\mathrm{d}_2')$ $d(x, x) = 0$, atunci spunem că avem o *pseudometrică*, dacă lipsește $\mathrm{d}_3)$ atunci d se numește *cvasimetrică* iar dacă lipsește $\mathrm{d}_4)$ vom spune că d este o *semimetrică*.

Orice spațiu metric este un spațiu pseudometric însă despre afirmația reciprocă putem spune numai că există o relație de echivalență „$\sim$" astfel încît spațiul cît corespunzător $S/\sim = \widetilde{S}$ să devină un spațiu metric. În adevăr, luînd „$x \sim y$ dacă și numai dacă $d(x, y) = 0$" și $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(x, y)$ pentru orice $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, unde prin $\tilde{x}$ și $\tilde{y}$ am notat respectiv clasa elementelor din S care sînt echivalente cu x și respectiv y, obținem că (S, d) este un spațiu metric.

Definiția 2.1.11. Un șir de elemente $\{x_n\} \subseteq S$ este convergent în pseudometrica (metrica) d către un element $x_0 \in S$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n(\varepsilon)$ astfel încît $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant n(\varepsilon)$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.1.12. Un spațiu pseudometric (metric) (S, d) se numește *complet* relativ la d dacă orice șir fundamental relativ la d este convergent către un element din S.

Definiția 2.1.13. Două structuri metrice (S, d) și (S', d') se numesc omeomorfe dacă există o bijecție $f: S \to S'$ astfel încît din convergența oricărui șir $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$ în (S, d) să rezulte convergența $f(x_n) \to f(x_0)$ în (S', d') și reciproc; f se numește omeomorfism.

Definiția 2.1.14. [159] O mulțime S se numește *spațiu metric generalizat* dacă există o funcție $d: S \times S \to [0, \infty]$ cu proprietățile din definiția 2.1.10.

Să reamintim diferite tipuri de convergențe pe $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{K}, P)$ și diferite metrici în care pot fi exprimate aceste convergențe.

Se știe că în teoria probabilităților în afară de convergența punctuală și convergența uniformă se utilizează alte tipuri de convergență mai slabă. De multe ori se utilizează în locul unei funcții clasa de echivalență (luată ca element) la care această funcție aparține, relația de echivalență fiind dată de egalitatea P-a.p.t. a funcțiilor respective sau cu ajutorul unei pseudometrici. Această necesitate impune și alte considerații asupra probabilității P, de altfel în concordanță cu o cerință intuitivă, adică pare natural să admitem că orice eveniment din $\mathcal{P}(\Omega)$ care implică un eveniment din $\mathcal{K}$, de probabilitate nulă, este din $\mathcal{K}$ și prin urmare tot de probabilitate nulă. În acest sens se introduce

Definiția 2.1.15. Un cîmp borelian de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se numește *complet* dacă orice parte a unui eveniment din $\mathcal{K}$ de probabilitate nulă aparține la $\mathcal{K}$.

Întrucît se demonstrează că orice cîmp borelian de probabilitate poate fi completat, se presupune în general că se lucrează cu probabilități complete. O proprietate importantă a spațiilor cu probabilitate completă este aceea că dacă X este o variabilă aleatoare definită P-a.p.t. pe Ω iar Y este o altă aplicație definită P-a.p.t. pe Ω astfel încît $X = Y$, P-a.p.t., atunci și Y este $\mathcal{K}$-măsurabilă, adică este o variabilă aleatoare pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Mai mult, se poate demonstra că dacă $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ este un cîmp probabilizat complet și $\{X_n\}$ este un șir de variabile aleatoare, definite P-a.p.t. pe Ω și $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, P-a.p.t., atunci X este o variabilă aleatoare pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Fără ipoteza de completitudine asupra lui P se pot da exemple cînd acest rezultat fundamental nu are loc.

Să sintetizăm acest tip de convergență prin

Definiția 2.1.16. Un șir de variabile aleatoare $\{X_n\}$ definite pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *converge aproape sigur* sau *P-a.p.t.* pe Ω către variabila aleatoare X dacă $P(\{\omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ există și este egală cu } X(\omega)\}) = 1$ și se notează $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Evident că $P(\{\omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ nu există}\}) = 0$.

Transpunînd în termenii teoriei probabilităților teorema de convergență punctuală pentru șiruri de funcții reale obținem că un șir de variabile aleatoare este convergent aproape sigur către o variabilă aleatoare dacă și numai dacă el este șir aproape sigur Cauchy.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.1.17. Spunem că șirul de variabile aleatoare $\{X_n\}$ *converge tare* către variabila aleatoare X dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ există un număr natural $n(\varepsilon, \delta)$ astfel încît

$$P\left(\bigcup_{n > n(\varepsilon, \delta)} \{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \delta\}\right) < \varepsilon.$$

Vom avea

Propoziția 2.1.1. *Convergența tare și convergența aproape sigură sînt echivalente (pentru demonstrație a se vedea* [102], [47], [197].

Un nou tip de convergență care nu este echivalent cu convergența aproape sigură este dat de

Definiția 2.1.18. Spunem că un șir de variabile aleatoare $\{X_n\}$ *converge în probabilitate* către variabila aleatoare X dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\delta > 0$ există un $n(\varepsilon, \delta)$ astfel încît să avem

$$P(\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) < \delta \text{ pentru orice } n > n(\varepsilon, \delta)$$

ceea ce evident este echivalent cu

$$\lim_{n \to \infty} P(\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) = 0 \quad \text{pentru orice } \varepsilon > 0$$

și se notează $X_n \xrightarrow{p.} X$.

Propoziția 2.1.2. *Orice șir de variabile aleatoare care converge aproape sigur către X este convergent în probabilitate către X.*

(Pentru demonstrație a se vedea [47], [102], [197].

În ceea ce privește implicația inversă aceasta nu are loc însă avem

Propoziția 2.1.3. (F. Riesz) *Dacă $X_n \xrightarrow{p.} X$ (sau este Cauchy în probabilitate), atunci există un subșir $\{X_{n_k}\}$ cu proprietatea că $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$ (sau este Cauchy aproape sigur).*

O încadrare naturală a convergenței în probabilitate este oferită de metrica d_P introdusă cu ajutorul mulțimii numerice $K_X = \{\varepsilon : \varepsilon > 0, P(\{\omega: |X(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) < \varepsilon\}$, pentru că avem

Teorema 2.1.15. *Dacă*

$$d_P(X, Y) = \inf K_{X-Y}$$

atunci $d_P: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbf{R}$ este o pseudometrică pe $\mathcal{L}$ iar convergența în pseudometrica d_P este echivalentă cu convergența în probabilitate (a se vedea [47], [102], [199]).

Observație. Ky-Fan a introdus metrica

$$d_P(X, Y) = \inf\{\varepsilon > 0: P(\{\omega: |X(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\} < \varepsilon\}$$

despre care de asemenea se poate arăta că este echivalentă cu convergența în probabilitate.

În multe cazuri în locul variabilelor aleatoare asociate unui fenomen aleator se caută direct funcțiile de repartiție care se știe că dau informații atît asupra valorilor cît și asupra probabilităților cu care sînt luate aceste valori, ceea ce este complicat cînd avem un număr mare de valori. Determinarea funcției de repartiție fiind complicată sau uneori imposibilă se recurge la găsirea altor parametri caracteristici variabilei aleatoare dintre care un

Scanned with OKEN Scanner

rol de seamă îl ocupă așa numitele caracteristici numerice: valoarea medie, momentele de diferite tipuri și ordine, mediana, cvantilele, modele, asimetria și excesul. Acestea dau unele informații cu privire la distribuirea valorilor variabilei aleatoare în funcție de probabilitățile lor. În acest scop amintim că integrala unei funcții simple nenegative $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_{A_i}$ se definește prin

$$\int_\Omega X \, dP = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i)$$

iar în cazul unei funcții $\mathcal{K}$-măsurabile și pozitive se definește prin

$$\int_\Omega X \, dP = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega X_n \, dP$$

$\{X_n\}$ fiind șirul de funcții simple, monoton crescător și convergent către X, a cărei existență este asigurată de însăși proprietatea de $\mathcal{K}$-măsurabilitate.

În teoria probabilităților numărul $M(X)$ asociat lui X dat de

$$M(X) = \int_\Omega X \, dP$$

se numește *valoare medie* a variabilei aleatoare X. În mod analog se introduc *momentele de ordin* k, $k = 1, 2, \ldots$ și respectiv *momentele absolute de ordin* r, $r \in (0, \infty)$, ca fiind numerele $M(X^k)$ și respectiv $M(|X|^r)$.

În general se înțelege prin $L^r(\Omega, \mathcal{K}, P) = \{X: \Omega \to \mathbf{R}$ cu $M(|X|^r) < \infty\}$ iar dacă $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este măsurabilă Borel și cu proprietatea că $g(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{K}, P)$ atunci se numește *moment de ordin* g numărul

$$M_g(X) = \int_\Omega g(X) \, dP = \int_{\mathbf{R}} g(x) \, dF_X(x)$$

asociat variabilei aleatoare X.

Pentru a introduce o altă metrică pe $\mathcal{L}$ a cărei convergență este echivalentă cu convergența în probabilitate să amintim, mai întîi, una din inegalitățile fundamentale care conține inegalitățile clasice ale lui Cebîșev, Markov, Kolmogorov și anume:

Propoziția 2.1.4. *Fie* $X \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *iar* $g: \mathbf{R} \to [0, \infty)$, *măsurabilă Borel. Dacă* g *este pară și nedescrescătoare pe* $[0, \infty)$ *atunci pentru orice* $a \geqslant 0$ *avem*

$$\frac{M(g(X)) - g(a)}{\text{a.s. sup } g(X)} \leqslant P(\{\omega: |X(\omega)| \geqslant a\}) \leqslant \frac{M(g(X))}{g(a)}.$$

Dacă g este nedescrescătoare pe $\mathbf{R}$ termenul din mijloc se poate înlocui cu $P(\{\omega: X(\omega) \geqslant a\})$ pentru orice $a \in \mathbf{R}$.

Dacă, în inegalitatea de mai sus se consideră $g(x) = \dfrac{|x|^r}{1 + |x|^r}$, $r > 0$, se obține

Propoziția 2.1.5. $X_n \xrightarrow{p} X$ *dacă și numai dacă* $M\left(\dfrac{|X_n - X|^r}{1 + |X_n - X|^r}\right) \to 0$, *pentru* $n \to \infty$, $r > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică ușor că aplicația $d(X, Y) = M\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right)$ este o pseudometrică pe $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{K}, P)$ pentru care axioma de identitate este verificată dacă și numai dacă $X = Y$, a.s., deci spațiul cît față de această relație de echivalență este un spațiu metric în care convergența este echivalentă cu convergența în probabilitate.

Un nou tip de convergență este sugerat de așa numita c_r-inegalitate

$$M(|X+Y|^r) \leqslant c_r M(|X|^r) + c_r M(|Y|^r)$$

unde $c_r = 1$ pentru $r \leqslant 1$ și $c_r = 2^{r-1}$ pentru $r \geqslant 1$.

Definiția 2.1.19. Spunem că un șir $\{X_n\} \subseteq \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *converge în medie de ordin* r către variabila aleatoare X dacă

$$M(|X_n - X|^r) \to 0, \quad n \to \infty$$

și notăm prin $X_n \overset{m.r.}{\to} X$.

În ce privește legătura dintre convergența în medie de ordin r și convergența în probabilitate, prin înlocuirea lui X cu $X_n - X$ în inegalitatea din propoziția 2.1.4. obținem

Propoziția 2.1.6. *Dacă* $X_n \overset{m.r.}{\to} X$ *atunci* $X_n \overset{p}{\to} X$; *dacă* $\{X_n\}$ *este aproape sigur uniform mărginit atunci avem implicația inversă* $X_n \overset{p}{\to} X$ *implică* $X_n \overset{m.r.}{\to} X$, $n \to \infty$.

Observînd că $M(|X - Y|) = 0$ dacă și numai dacă $X = Y$ aproape sigur, considerînd spațiul cît și ținînd seama de c_r-inegalitatea și inegalitatea lui Minkowski obținem

Propoziția 2.1.7. *Spațiile cît* $\widetilde{L}^r$ *sînt respectiv spații metrice cu metrica*

$$d(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = M(|\widetilde{X} - \widetilde{Y}|^r), \quad 0 < r < 1,$$

și spații normate (deci și metrice pentru $d(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = ||\widetilde{X} - \widetilde{Y}||$), *pentru* $1 \leqslant r < \infty$, $||\widetilde{X}|| = M^{1/r}(|\widetilde{X}|^r)$.

$(\widetilde{L}^r, d)$, $0 < r < \infty$ sînt spații metrice complete în care convergența în metrica d este echivalentă cu convergența în medie de ordin r.

În cazul $\widetilde{L}^\infty$ aplicația $d_\infty(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \text{a.s. sup}\,|\widetilde{X} - \widetilde{Y}| = \inf_{E \in \mathcal{N}} \sup_{\omega \in \Omega - E} |\widetilde{X}(\omega) - \widetilde{Y}(\omega)|$ $\mathcal{N}$ fiind clasa mulțimilor E cu proprietatea că $P(E) = 0$ (de aceea se mai numește și spațiul funcțiilor esențial mărginite) este o metrică ce corespunde convergenței *aproape sigur uniforme* și este un spațiu metric complet.

Un alt mod de a introduce metrici pe $\mathcal{L}$ este acela dat de A. N. Kolmogorov care utilizează repartițiile variabilelor aleatoare obținînd

$$d_1(X, Y) = \sup_{B \in \mathcal{B}(R)} P^{(X)}(B) - P^{(Y)}(B) \quad \text{și} \quad d_2(X, Y) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_X(x) - F_Y(x)|$$

numite respectiv prima și a doua metrică a lui Kolmogorov.

Evident că $d_1(X, Y) = 0$ implică $P^{(X)}(B) = P^{(Y)}(B)$ pentru orice B din $\mathcal{B}^1$ însă nu și egalitatea $X = Y$, deoarece repartiția $P^{(X)}(B)$ nu definește funcția X ci o clasă de echivalență față de metrica d_1: clasa variabilelor aleatoare ce au aceeași repartiție $P^{(X)}(B)$. Avînd aceeași repartiție aceste variabile aleatoare au, în particular aceeași funcție de repartiție $F_X(x)$ deoarece $F_X(x) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= P^{(X)}((-\infty, x))$. Avînd în vedere și implicația inversă rezultă că clasa variabilelor aleatoare ce au aceeași funcție de repartiție F_X au și aceeași repartiție $P^{(X)}(B)$ și d_1 este o metrică pe spațiul claselor de variabile aleatoare $\mathcal{L}_0$ care au aceeași funcție de repartiție. Între cele două metrici avem relația $d_2(X, Y) \leqslant$ $\leqslant d_1(X, Y)$.

Să notăm acum prin $\mathcal{R}_v$ clasa funcțiilor de repartiție asociate spațiului variabilelor aleatoare $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{K}, P)$, finite, deci $\mathcal{R}_v = \{F: \mathbf{R} \to [0, 1]$, nedescrescătoare, continue la stînga, $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = \inf_{x \in \mathbf{R}} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = \sup_{x \in \mathbf{R}} F(x) = 1\}$ și să introducem alte două metrici care vor fi utilizate în restul cărții. Una dintre acestea este metrica lui Lévy care pornește de la observația că dacă prin punctul de coordonate $(x, F(x))$ se duce o paralelă la bisectoarea a doua a planului uOv, $u - F(x) = -(v - x)$ și se notează cu d_x distanța măsurată pe această dreaptă între punctul $(x, F(x))$ și punctul în care această dreaptă taie graficul lui G, unde $F, G \in \mathcal{R}_v$, atunci vom avea

Propoziția 2.1.8. *Aplicația* $d_L: \mathcal{R}_v \times \mathcal{R}_v \to \mathbf{R}$ *definită prin* $d_L(F, G) =$ $= \sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{d_x}{\sqrt{2}} = \inf \{\varepsilon: F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leqslant G(x) \leqslant F(x + \varepsilon) + \varepsilon, x \in \mathbf{R}\}$ *este o metrică pe* $\mathcal{R}_v$, *numită metrica lui Lévy.*

Se poate demonstra că $(\mathcal{R}_v, d_L)$ este un spațiu metric complet. Deasemenea menționăm o proprietate simplă a metricii lui Lévy și anume: dacă $F, G \in \mathcal{R}_v$ și $F(x) \leqslant G(x)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci și $d_L(F, H_0) \geqslant$ $\geqslant d_L(G, H_0)$, H_0 fiind funcția definită prin $H_0(x) = 0$ pentru $x \leqslant 0$ și $H_0(x) = 1$ pentru $x > 0$.

Un alt tip de convergență pe $\mathcal{R}_v$ este dat de

Definiția 2.1.20. Spunem că șirul $\{F_n\} \subseteq \mathcal{R}_v$ *converge slab* către funcția de repartiție F dacă $F_n(x) \to F(x)$, $n \to \infty$, pentru orice punct x din mulțimea punctelor de continuitate ale funcției F și se notează $F_n \xrightarrow{sl.} F$.

O proprietate importantă a acestei convergențe constă în aceea că $F_n \xrightarrow{sl.} F$ dacă și numai dacă $F_n(x) \to F(x)$ pentru orice $x \in D$, D fiind o mulțime densă în $\mathbf{R}$.

Vom avea

Teorema 2.1.16. *Fie* $\{F_n\} \subseteq \mathcal{R}_v$ *și* $F \in \mathcal{R}_v$, *atunci următoarele afirmații sînt echivalente:*

1) $F_n \xrightarrow{sl.} F$,

2) $F_n(x) \to F(x)$, *pentru orice* $x \in D$ *cu* $\bar{D} \supseteq \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$,

3) $d_L(F_n, F) \to 0$ *pentru* $n \to \infty$,

4) *dacă* f *este o funcție reală continuă și mărginită pe* $\mathbf{R}$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbf{R}} f(x)\, \mathrm{d}F_n(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, \mathrm{d}F(x).$$

Observația 1). Ipoteza $F \in \mathcal{R}_v$ este esențială în această teoremă căci altfel convergența slabă nu mai este echivalentă cu convergența în metrica lui Lévy. În adevăr dacă vom considera mulțimea $\mathcal{R} = \{f: \mathbf{R} \to [0, 1]$, nedescrescătoare și continue la stînga$\}$ vom avea că $\mathcal{R}_v \subset \mathcal{R}$ și convergența în

Scanned with OKEN Scanner

metrica lui Lévy în $\mathcal{R}$ nu este echivalentă cu convergența slabă în $\mathcal{R}$, după cum rezultă din exemplul dat de șirul $\{F_n\}$ în care $F_n(x) = 0$ pentru $x \leqslant n$ și $F_n(x) = 1$ pentru $x > n$. Vom avea că $d_L(F_n, F) = 1$, dacă $F(x) = 0$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Mai mult șirul $\{F_n\}$ nu este un șir Cauchy în $(\mathcal{R}, d_L)$ căci $d_L(F_n, F_m) = 1$ dacă $m \neq n$ și 0 dacă $m = n$ și nu are nici un punct de acumulare. Totuși avem că șirul $F_n(x) \to F(x) = 0$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Cu privire la convergența slabă avem

Teorema 2.1.17. (Teorema I-a a lui Helly). *Orice șir de funcții de repartiție* $\{F_n\} \subset \mathcal{R}$ *conține un subșir slab convergent către* $F \in \mathcal{R}$.

Observația 2). Chiar dacă șirul inițial $\{F_n\} \subset \mathcal{R}_v$ nu rezultă că $F \in \mathcal{R}_v$ după cum se observă din exemplul de mai sus în care $\{F_n\} \in \mathcal{R}_v$ dar $F \equiv 0$, deci $F \in \mathcal{R}$ și $F \notin \mathcal{R}_v$.

Amintim că un spațiu topologic S se numește compact prin șiruri dacă fiecare șir de elemente ale sale conține un subșir convergent către un element din S și observăm că teorema de mai sus permite un răspuns privind compacitatea lui $\mathcal{R}$ și $\mathcal{R}_v$.

Rezultă că $\mathcal{R}$ este compact prin șiruri relativ la convergența slabă și închis relativ la această convergență. $\mathcal{R}_v$ nu este închis relativ la convergența slabă și mai curios este faptul că un șir $\{F_n\} \subset \mathcal{R}_v$ este convergent către un element din $\mathcal{R}_v$ dacă și numai dacă este convergent în spațiul metric $(\mathcal{R}_v, d_L)$ adică slab convergența este echivalentă cu convergența în metrica lui Lévy pe $\mathcal{R}_v$. Această echivalență se consideră uneori numai ca o corespondență oarecum forțată și patologică în sensul că pe de o parte $\mathcal{R}_v$ nu este închis relativ la convergența slabă iar pe de altă parte, în ipoteza teoremei 2.1.16 se cere ca limita să fie din $\mathcal{R}_v$.

Asemenea neajunsuri, cum este absența compacității și a unor criterii directe de convergență slabă în $\mathcal{R}_v$, au condus la înlocuirea lui $\mathcal{R}_v$ în anumite probleme limită centrală cu spațiul funcțiilor caracteristice $\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \{\varphi_X(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx} dF_X(x),\ X \in \mathcal{E}\}$ care este închis față de convergența uniformă și izomorf cu $\mathcal{R}_v$, operația corespunzătoare produsului de convoluție fiind produsul obișnuit în $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Teorema 2.1.16 ne sugerează introducerea unei terminologii corespunzătoare pe spațiul $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{K}, P)$ observînd că aplicația $d_L : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ dată prin

$$d_L(X, Y) = d_L(F_X, F_Y)$$

unde F_X și F_Y sînt funcțiile de repartiție asociate lui X și Y, este o pseudometrică pe $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{K}, P)$.

Definiția 2.1.21. Se spune că șirul de variabile aleatoare $\{X_n\} \subset \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *converge în repartiție* către variabila aleatoare X dacă $\lim_{n \to \infty} d_L(X_n, X) = 0$ și notăm prin $X_n \xrightarrow{rep.} X$.

Spațiul pseudometric $(\mathcal{E}, d_L)$ este complet și devine metric dacă se consideră mulțimea $\tilde{\mathcal{E}}$ a claselor de variabile aleatoare ce au aceeași funcție de repartiție.

Cu privire la legătura dintre această convergență și alte convergențe avem

Propoziția 2.1.9. *Dacă* $X_n \xrightarrow{p.} X$ *atunci* $X_n \xrightarrow{rep.} X$. *Dacă* $X_n \xrightarrow{rep.} X$ *și* $X = c =$ *constant a.s. atunci* $X_n \xrightarrow{p.} X = c$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Afirmația $X_n \xrightarrow{rep.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p.} X$ nu este în general adevărată, după cum se arată prin exemple.

Partea a doua a propoziției de mai sus este importantă prin aceea că pune în evidență absența aditivității convergenței în repartiție căci dacă $X_n \xrightarrow{rep.} X$ ar implica $X_n - X \xrightarrow{rep.} 0$ atunci am avea $X_n \xrightarrow{p.} X$.

Revenind la neajunsurile semnalate în $(\mathcal{R}, d_L)$ și $(\mathcal{R}_v, d_L)$ amintim că D. A. Sibley [262] ocupîndu-se de această problemă arată că orice submulțime deschisă în $(\mathcal{R}, d_L)$ conține un șir care converge slab dar care nu are nici un punct de acumulare relativ la metrica d_L. Prin urmare nici o submulțime compactă din $(\mathcal{R}, d_L)$ nu poate conține o submulțime deschisă în metrica d_L adică $(\mathcal{R}, d_L)$ nu poate fi nici local compact. În adevăr, orice submulțime compactă din $(\mathcal{R}, d_L)$ este nicăieri densă. O asemenea proprietate extrem de neconvenabilă în problemele ce interesează teoria semigrupurilor topologice a fost evitată de către D. A. Sibley prin introducerea unei metrici mai slabe $d_\mathcal{L}$ cu care soluționează și celelalte neajunsuri, totodată fiind suficient de naturală prin proprietățile ei.

Definiția 2.1.22. Aplicația $d_\mathcal{L} : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ dată prin $d_\mathcal{L}(F, G) = \inf\left\{h : F\left(x - \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} \leqslant G\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \text{ și } G\left(x - \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} \leqslant F\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \text{ pentru } -\frac{1}{h} - \frac{h}{2} < x < \frac{1}{h} + \frac{h}{2}\right\}$, se numește *metrica modificată a lui Lévy* sau *metrica lui Sibley*.

Înainte de a verifica axiomele metricii pentru $d_\mathcal{L}$ să dăm și o altă formă expresiei prin care este definită $d_\mathcal{L}$ care deși este mai puțin simetrică este uneori mai ușor de verificat.

Lema 2.1.10. *Pentru orice $F, G \in \mathcal{R}$ și $h \in (0, \infty)$ să notăm cu $A(F, G; h)$ și respectiv $B(F, G, ; h)$ proprietățile*

$$A(F, G; h) \text{ dacă } F(x - h) - h \leqslant G(x) \text{ pentru } -\frac{1}{h} < x < \frac{1}{h} + h,$$

$$B(F, G; h) \text{ dacă } F(x + h) + h \geqslant G(x) \text{ pentru } -\frac{1}{h} - h < x < \frac{1}{h},$$

atunci vom avea

$$d_\mathcal{L}(F, G) = \inf \{h: \text{ambele proprietăți } A(F, G; h) \text{ și } B(F, G; h) \text{ sînt verificate}\}.$$

Demonstrație. Să observăm că substituind în proprietatea $A(F, G; h)$ pe x cu $x + \frac{h}{2}$ obținem că ea este echivalentă cu relația

$$F\left(x - \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} \leqslant G\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \text{ pentru } -\frac{h}{2} - \frac{1}{h} < x < \frac{h}{2} + \frac{1}{h}$$

iar dacă substituim în $A(F, G; h)$ pe x cu $x + h$ obținem $B(G, F; h)$ și reciproc înlocuind în $B(F, G; h)$ pe x cu $x - h$ obținem $A(G, F; h)$. Prin urmare $A(F, G; h)$ este echivalentă cu $B(G, F; h)$. Ținînd seama și de echivalența de mai sus rezultă egalitatea dorită.

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm că dacă $d_{\mathcal{L}}(F,G) = h > 0$ atunci ambele proprietăți $A(F,G;h)$ și $B(F,G;h)$ sînt verificate.

Să verificăm acum că $d_{\mathcal{L}}$ definește o metrică pe $\mathcal{R}$ și pentru aceasta să observăm că $d_{\mathcal{L}}(F,G) \geqslant 0$ oricare ar fi $F, G \in \mathcal{R}$. Pentru justificarea axiomei de identitate avem evident că $d_{\mathcal{L}}(F,F) = 0$ pentru orice $F \in \mathcal{R}$ și reciproc dacă $d_{\mathcal{L}}(F,G) = 0$ atunci pentru orice x putem alege un h suficient de mic astfel încît să aibă loc ambele proprietăți $A(F,G;h)$ și $B(F,G;h)$ pe un interval conținînd pe x. Vom avea astfel că $F(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x+h) + h$ în care făcînd pe $h \to 0$ obținem $F(x-0) \leqslant G(x) \leqslant F(x+0)$. Prin urmare în orice punct x de continuitate pentru F avem $F(x) = G(x)$ ceea ce este echivalent cu $F = G$.

Proprietatea de simetrie pentru $d_{\mathcal{L}}(F,G)$ rezultă din lema 2.1.10 și echivalența lui $A(F,G;h)$ cu $B(G,F;h)$ justificată în demonstrația acestei leme. Pentru verificarea inegalității triunghiului fie $F, G, E \in \mathcal{R}$ și $h = d_{\mathcal{L}}(F,G)$, $k = d_{\mathcal{L}}(G,E)$ cu $h, k > 0$. Întrucît pentru $h + k \geqslant 1$ inegalitatea triunghiului este evidentă, putem presupune $h + k < 1$. Să notăm, pentru orice $a > 0$, cu I_a segmentul $\left[-\frac{a}{2} - \frac{1}{a}, \frac{a}{2} + \frac{1}{a}\right]$ și să presupunem că $x \in I_{h+k}$.

Folosind observația că $h(h+k) < 1$, deducem ușor că $x - \frac{k}{2} \in I_h$ și $x + \frac{h}{2} \in I_k$. Din ipoteza că $A(F,G;h)$ și $A(G,E;k)$ au loc și din apartenențele precizate deducem că

$$F\left(x - \frac{h+k}{2}\right) - \frac{h+k}{2} \leqslant G\left(x - \frac{k}{2} + \frac{h}{2}\right) - \frac{k}{2} + \frac{h}{2} \leqslant E\left(x + \frac{h+k}{2}\right) + \frac{h+k}{2}$$

adică are loc $A(F,E;h+k)$. În mod asemănător din $B(F,G;h)$ și $B(G,E;k)$ rezultă proprietatea $B(F,E;h+k)$. Obținem astfel că

$$d_{\mathcal{L}}(F,E) \leqslant h + k = d_{\mathcal{L}}(F,G) + d_{\mathcal{L}}(G,E)$$

ceea ce justifică faptul că $d_{\mathcal{L}}$ este o metrică pe $\mathcal{R}$.

Exemplu. Fie $F(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$ și familia H_a, $a \geqslant 0$ ($H_a(x) = 0$ pentru $x \leqslant a$ și $H_a(x) = 1$ pentru $x > a$), atunci $A(F,H_a;h)$ este verificată pentru orice $h > 0$ iar $B(F,H_a;h)$ devine $H_a(x) \leqslant h$ pentru $0 \leqslant x \leqslant 1/h$, ea fiind adevărată, în cazul $a \geqslant 1$, pentru $h = 1/a$ și falsă pentru orice $h < 1/a$ iar în cazul $0 \leqslant a < 1$ această relație este falsă pentru orice $h < 1$. Rezultă astfel că

$$d_{\mathcal{L}}(F,H_a) = \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{a}\right)$$

iar pentru șirul din observația 1) de mai sus.

$$d_{\mathcal{L}}(F,F_n) = \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{n}\right)$$

deci $d_{\mathcal{L}}(F_n,F) \to 0$ pentru $n \to \infty$ deși $d_L(F_n,F) = 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Justificarea acestor deosebiri între cele două metrici constă deci în aceea că metrica d_L este sensibilă la ceea ce se întîmplă $+\infty$ și $-\infty$ în timp ce $d_{\mathcal{L}}$ nu este.

Scanned with OKEN Scanner

Principalele proprietăți ale lui $d_{\mathcal{L}}$ sînt date de

Teorema 2.1.18. 1) *Dacă* $\{F_n\}$ *este un șir de funcții din* $\mathcal{R}$ *și* $F \in \mathcal{R}$ *atunci* $d_{\mathcal{L}}(F_n, F) \to 0$ *pentru* $n \to \infty$ *dacă și numai dacă* $F_n \xrightarrow{sl.} F$

2) *Spațiul* $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ *este compact,*

3) *Spațiul* $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ *este un spațiu metric complet,*

4) *Dacă* $\mathcal{R}^+ = \{F \in \mathcal{R}$ *cu* $F(0) = 0\}$, *atunci* $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$ *este un spațiu metric compact,*

5) *Spațiul* $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ *este conex și local conex,*

6) $d_{\mathcal{L}}(F, G) \leqslant 1$ *pentru orice* $F, G \in \mathcal{R}$,

7) *Pentru orice* F *și* G *din* $\mathcal{R}$ *avem* $d_{\mathcal{L}}(F, G) \leqslant d_L(F, G)$ *însă* $d_{\mathcal{L}}$ *și* d_L *pe* $\mathcal{R}_0$ *definesc aceeași topologie.*

Demonstrație. 1) Fie $F_n \xrightarrow{sl.} F$, atunci $F_n(x) \to F(x)$ pentru orice $x \in D$, unde D este o mulțime densă în $\mathbf{R}$. Să considerăm $\varepsilon > 0$ arbitrar și să alegem în D un a cu proprietatea că $a > \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$. Fie $a_0 \in D$ cu proprietatea că $a_0 < -a$ și să efectuăm o partiție $a_0 < a_1 < \ldots < a_m = a$ a segmentului $[a_0, a]$ cu $a_i \in D$, $i = 0, 1, \ldots, m$ și cu proprietatea că $|a_i - a_{i-1}| < \varepsilon$ pentru $i = 1, 2, \ldots, m$. Să alegem un n_0 suficient de mare astfel încît pentru orice $n \geqslant n_0$ să avem $|F_n(a_i) - F(a_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $i = 0, 1, \ldots, m$ și să observăm că orice x cu proprietatea $x \in \left[-\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right]$ sau $x \in \left[-\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right]$ rezultă că $x \in [a_0, a]$. Obținem că în ambele cazuri există un k astfel încît $x \in [a_{k-1}, a_k]$ și putem scrie că

$$F_n(x) \leqslant F_n(a_k) \leqslant F(a_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant F(x + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}$$

și

$$F_n(x) \geqslant F(a_{k-1}) \geqslant F_n(a_{k-1}) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant F(x - \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Această relație fiind echivalentă cu $A(F_n, F; \varepsilon)$ și $B(F_n, F; \varepsilon)$ rezultă că $d_{\mathcal{L}}(F_n, F) < \varepsilon$ adică $d_{\mathcal{L}}(F_n, F) \to 0$ pentru $n \to \infty$. Reciproc să arătăm că din condiția $d_{\mathcal{L}}(F_n, F) \to 0$ pentru $n \to \infty$, rezultă că $F_n \xrightarrow{sl.} F$. În adevăr, dacă x este un punct de continuitate pentru F și alegem un $\varepsilon > 0$, arbitrar, atunci există un $\delta > 0$ astfel încît să avem $|F_n(x) - F(x')| < \varepsilon$ pentru $|x - x'| < \delta$. Fie $h = \min\left\{\varepsilon, \delta, \frac{1}{|x|}\right\}$, dacă $x \neq 0$ și $h = \min\{\varepsilon, \delta\}$ pentru $x = 0$. Să alegem n_0 suficient de mare astfel încît să avem că $d_{\mathcal{L}}(F_n, F) < h$ pentru orice $n > n_0$. Întrucît $|x| < \frac{1}{h}$ rezultă, din proprietățile $A(F_n, F; h)$ și $B(F_n, F; h)$ că avem $F_n(x) \geqslant F(x - h) - h \geqslant F(x) - 2\varepsilon$ și $F_n(x) \leqslant F(x + h) + h \leqslant F(x) + 2\varepsilon$ ceea ce este echivalent cu $F_n(x) \to F(x)$, pentru $n \to \infty$, adică $F_n \xrightarrow{sl.} F$.

2) Compacitatea lui $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ rezultă din proprietatea 1) demonstrată mai sus și din teorema I-a a lui Helly.

Scanned with OKEN Scanner

3) Completitudinea lui $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ rezultă din faptul că orice spațiu metric compact este complet.

4) $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$ fiind un subspațiu metric închis al spațiului metric compact $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ este la rîndul său compact.

5) Pentru orice $F \in \mathcal{R}$ și $\varepsilon > 0$ vecinătatea $\{G: d_{\mathcal{L}}(F, G) < \varepsilon\}$ este conexă prin arce deci, în particular, $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ este conex și local conex. Mai mult, din această proprietate și din 2) rezultă că $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ este un spațiu Peano, adică este imaginea continuă a unui arc.

6) Rezultă ușor din definiția lui $\mathcal{R}$ (oricare ar fi $F \in \mathcal{R}$ avem că $F: \mathbf{R} \to [0, 1]$).

7) Să observăm că pentru orice h pentru care avem $F(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x+h) + h$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, avem că $A(F, G; h)$ și $B(F, G; h)$ sînt verificate, deci $d_{\mathcal{L}}(F, G) \leqslant d_L(F, G)$ pentru orice $F, G \in \mathcal{R}$. Rezultă că $d_L(F_n, F) \to 0$ implică $d_{\mathcal{L}}(F_n, F) \to 0$ adică topologia definită de $d_{\mathcal{L}}$ este mai slabă decît cea definită de d_L. Exemplul din observația 1) de mai sus ne permite să afirmăm că este strict mai slabă. Cu toate acestea în $\mathcal{R}_v$ se poate arăta că orice submulțime deschisă în topologia definită de d_L conține o mulțime deschisă în topologia definită de $d_{\mathcal{L}}$, adică topologiile induse de $d_{\mathcal{L}}$ și d_L pe $\mathcal{R}_v$ coincid și teorema este demonstrată.

Observația 3). Dacă $F, G \in \mathcal{R}^+$ și $h > 0$ atunci partea stîngă a relației din definiția lui $d_{\mathcal{L}}$ este negativă pentru $x < h/2$ deci forma echivalentă a lui $A(F, G; h)$, ce apare în demonstrație lui 2.1.10, devine

$$F(x-h)/2) - h/2 \leqslant G(x + h/2) + h/2 \quad \text{pentru} \quad h/2 \leqslant x \leqslant 1/h + h/2.$$

Observația 4). Cu privire la convergența șirurilor de funcții de repartiție menționăm două teoreme care aparțin lui O. Onicescu, prezentate în [124, § 10,4] și care pun din nou în evidență importanța energiei informaționale [200], concept de mare generalitate și utilitate în aplicații, după cum vom vedea în capitolul IV.

1.3. CONSIDERAȚII ASUPRA SEMIGRUPULUI DEFINIT DE CONVOLUȚIE PE $\mathcal{R}$

Multe probleme ale analizei armonice, ale teoriei algebrelor de funcții și în special ale teoriei probabilităților conduc la considerarea produsului de convoluție pe spațiul funcțiilor absolut integrabile pe $\mathbf{R}$, $[0, \infty)$, $[0, a]$, $a < \infty$, pe un grup local compact (înzestrată cu măsura Haar) sau convoluția a însăși două măsuri. Multitudinea de probleme și importanța lor face greoaie enumerarea unei bibliografii adecvate unui scop global. De altfel pentru noi prezintă importanță convoluția ca operație de semigrup pe $\mathcal{R}$ sau anumite subclase ale acestuia și alte probleme specifice teoriei probabilităților care sînt tratate în [9], [150], [153], [154], [250], [285].

Să amintim că dacă $F, G \in \mathcal{R}$, se numește *produs de convoluție* al celor două funcții și se notează cu $F * G$ funcția

$$(F * G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, dG(y) = \int_{0}^{x} F(x-y)\, dG(y).$$

Pentru simplificarea calculelor, în cazul cînd se ia $F, G: \overline{\mathbf{R}} \to [0, 1]$, se poate presupune că $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$. Dacă $F, G \in \mathcal{R}^+$ rezultă că $F * G \in \mathcal{R}^+$ deoarece pentru y fixat funcția $F(x-y)$ este nedescrescătoare, continuă la stînga și mărginită de $F(-\infty) = 0$ și $F(\infty) \leqslant 1$, deci i se poate

Scanned with OKEN Scanner

aplica teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, obținînd pentru $F * G$ proprietățile cerute pentru apartenența la $\mathcal{R}^+$. De asemenea se deduce ușor că avem

1) $F * H_0 = F$ oricare ar fi $F \in \mathcal{R}^+$ iar $H_0(x) = 0$ pentru $x \leqslant 0$ și $H_0(x) = 1$ pentru $x > 1$.

2) $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \mathcal{R}^+$, $F_1(x) \geqslant F_2(x)$ și $G_1(x) \geqslant G_2(x)$, $x \in \mathbf{R}$, (ceea ce se mai scrie $F_1 \geqslant F_2$ și $G_1 \geqslant G_2$) implică $F_1 * G_1 \geqslant F_2 * G_2$,

3) $F * G = G * F$ oricare ar fi $F, G \in \mathcal{R}^+$,

4) $F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3$ oricare ar fi $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{R}^+$.

Deci $(\mathcal{R}^+, *)$ este un semigrup comutativ ordonat și cu element unitate (H_0).

Evident că dacă $H_a(x) = H_0(x - a)$ atunci avem că $H_a * H_{-a} = H_0$ și pentru orice $F \in \mathcal{R}_v$ avem $F(x) = (F * H)(x) = (F * H_{-a} * H_a)(x) = [F(a + \cdot) * H(\cdot + a)](x)$.

După cum vom vedea mai tîrziu proprietățile 1) — 4) sînt echivalente cu condițiile din deifniția funcției triunghiulare introdusă de A. N. Šerstnev [268], [269]. Întrucît problema soluției generale a sistemului de condiții 1) — 4) este deschisă, pînă în prezent, găsirea unor soluții particulare cum este „$*$“: $\mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$ prezintă interes.

Se știe că una din problemele fundamentale ale teoriei probabilităților cum este problema limită centrală utilizează funcțiile caracteristice asociate variabilelor aleatoare respective deși formularea ei este dată în limbajul legilor de repartiție. De fapt ea exprimă apropierea asimptotică a repartiției sumei de variabile aleatoare, convenabil centrată și normată, de repartiția normală. Repartiția sumei a două sau mai multe variabile aleatoare independente fiind dată de convoluția repartițiilor variabilelor termeni, este evidentă utilitatea acestei noțiuni. Ea este utilizată și în problema coincidenței însăși a legii respective cu legea normală, care nu mai este proprietate caracteristică. Este vorba de problema descompunerii repartițiilor în componente independente, problemă ce-și are începutul în lucrarea [58] a lui H. Cramér (1936) care demonstrează că dacă suma unui număr finit de variabile aleatoare independente are o repartiție normală atunci fiecare termen are această proprietate, care are mai mult un caracter exact decît asimptotic. Această teorie a descompunerii legilor de repartiție are o strînsă legătură cu teoria sumării variabilelor aleatoare și cu multe probleme ale statisticii liniare. Acestei teorii îi este consacrată monografia lui Yu. V. Linnik [153]. Pentru precizarea limbajului spunem că o variabilă aleatoare X, a cărei funcție de repartiție este F, admite o descompunere sau o factorizare în componentele $\{F_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, dacă există $n (n \geqslant 2)$, variabile aleatoare independente $X_1, \ldots, X_n$ astfel încît să avem $X = X_1 + \ldots + X_n$ ceea ce coincide cu descompunerea funcției de repartiție F sub forma $F = F_1 * F_2 * \ldots * F_n$. Aceasta corespunde, în limbajul funcțiilor caracteristice, la o descompunere de forma $\varphi(t) = \varphi_1(t)\ \varphi_2(t) \ldots \varphi_n(t)$ deoarece convoluției în $\mathcal{R}_v$ îi corespunde produsul obișnuit în $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Cele mai simple probleme ale descompunerii funcțiilor de repartiție constau în descrierea proprietăților analitice generale ale componentelor pe baza proprietăților funcției inițiale.

Dacă o funcție $F \in \mathcal{R}_v$ nu are componente diferite de cele improprii (de tipul H_a) atunci F se numește funcție de repartiție *nedecompozabilă*. Asemenea funcții joacă rolul elementelor simple, cum sînt numerele prime în teoria numerelor.

Scanned with OKEN Scanner

O variabilă aleatoare se zice nedecompozabilă dacă funcția sa de repartiție are această proprietate. Un exemplu de astfel de variabilă aleatoare este dat de orice variabilă aleatoare X care ia numai două valori întregi pozitive m_1 și m_2, $m_2 > m_1$. Se știe că funcția generatoare asociată lui X este seria $g_X(z) = \sum_m P(\{\omega : X(\omega) = m\})z^m$, $m \in Z$ = mulțimea numerelor întregi, z număr complex cu $|z| \leqslant 1$. Dacă X_1, X_2 sînt independente atunci $g_X(z) = g_{X_1}(z)g_{X_2}(z)$. În cazul nostru $g_X(z) = p_1 z^{m_1} + p_2 z^{m_2}$, $p_i = P(\{\omega : X(\omega) = m_i\})$. Dacă X ar fi decompozabilă de forma $X = X_1 + X_2$, am avea că

$$g_X(z) = g_{X_1}(z)\, g_{X_2}(z) \quad \text{cu} \quad g_{X_i}(z) = \sum_{k=1}^{n_i} p_{i_k} z^{m_{i_k}}, \quad i = 1,\ 2,$$

unde fiecare g_{X_i} are cel puțin doi coeficienți nenuli căci se poate demonstra [153] că dacă X are o repartiție în rețea și este decompozabilă, atunci componentele sale sînt de același tip, luînd valori de forma $kh + c$ și respectiv $kh + a - c$, c fiind arbitrar iar $a + kh$ fiind valorile lui X, $k \in \mathbf{Z}$, a, h constante. Rezultă că trebuie să avem

$$p_1 + p_2 z^{m_2 - m_1} = (a_1 + b_1 z^{n_1} + \ldots)(a_2 + b_2 z^{n_2} + \ldots),$$

unde a_i, $b_i > 0$ și restul termenilor dacă există sînt cu coeficienți pozitivi și în dreapta se obțin termeni în z de grad zero, n_1, $n_1 + n_2$, etc., ceea ce este absurd.

Există și exemple de variabile aleatoare de tip continuu care nu sînt decompozabile [64], [153], [65].

Rezultă că în $(\mathcal{R}_v, *)$ există elemente nedecompozabile însă în general nu este asigurată existența elementului invers și nu are loc regula de simplificare sau reducere în sensul că din $F_1 * F_2 = F_1 * F_3$ nu rezultă $F_2 = F_3$ și deci nici din $X_1 + X_2 = X_1 + X_3$ nu rezultă întotdeauna $X_2 = X_3$.

Fie, de exemplu, F_1 funcția de repartiție ce are ca funcție caracteristică pe $\varphi_1(t) = 1 - |t|$ pentru $|t| \leqslant 1$, $\varphi_1(t) = 0$ pentru $|t| > 1$ iar $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$ pentru $|t| \leqslant 1$ și $\varphi_2(t)$ coincide cu prelungirea prin periodicitate, cu perioada $T = 2$, pentru $|t| > 1$. Să amintim mai întîi o teoremă a lui Polya [211] care afirmă că orice funcție nenegativă, pară, continuă, inferior convexă $\left(\text{adică } \varphi(t_1 + t_2) \leqslant \dfrac{\varphi(t_1) + \varphi(t_2)}{2}\right)$ pentru $t > 0$ și $t < 0$, $\varphi(0) = 1$ și $\varphi(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$, este o funcție caracteristică. Din această teoremă rezultă că φ_1 este o funcție caracteristică iar φ_2 avînd seria Fourier

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)\,\pi t$$

rezultă că ea este funcția caracteristică corespunzătoare unei funcții de repartiție F_2. Evident avem că $\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_1(t)$ adică $F_1 * F_2 = F_1 * F_1$ dar $F_1 \neq F_2$.

Aceste anomalii în comportarea produsului de convoluție implică anomalii și în comportarea componentelor simple nedecompozabile adică absența unicității descompunerii în componente nedecompozabile. De exemplu, dacă

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu funcțiile de repartiție F_1, F_2, G_1, G_2 se verifică ușor că acestea sînt nedecompozabile și că $F_1 * F_2 = G_1 * G_2$. Deci există două descompuneri distincte, în componente nedecompozabile.

Există și exemple de repartiții de tip continuu datorate lui P. Lévy, R. Fischer, D. Dugué [64], [66], [153].

Situația este asemănătoare cu cea existentă în teoria algebrică a numerelor înaintea apariției teoriei idealelor care în acest caz este greu de construit atît din cauza dificultăților de introducere a unei a doua operații în $\mathcal{R}_v$ cît și a absenței regulii de simplificare.

Cu privire la decompozabilitatea legilor de repartiție sînt esențiale teoremele lui Hincin care stabilesc că mulțimea componentelor $\{F_i\}_{i\in I}$, ale unei legi de repartiție F, este compactă în topologia convergenței slabe și că legile de repartiție care nu au componente nedecompozabile sînt indefinit divizibile (adică pentru orice $n\in\mathbf{N}$ există o funcție de repartiție F_n astfel încît $F = F_n * \ldots * F_n$ cu n factori; ea coincide cu clasa legilor de repartiție limită ale șirurilor de variabile aleatoare cu influență mică în sumă). Hincin demonstrează că orice variabilă aleatoare se descompune într-o sumă dintre o variabilă aleatoare indefinit divizibilă și un număr finit sau o mulțime numărabilă de variabile aleatoare nedecompozabile.

Observație. Funcția $f(t) = \frac{1}{t} + \frac{t}{2}$ este descrescătoare pe intervalul $(0, \sqrt{2}]$ și deci dacă notăm cu A_t intervalul $\left(\frac{t}{2}, \frac{1}{t} + \frac{t}{2}\right)$ atunci avem că $A_s \subseteq A_t$ dacă $0 < t < s \leqslant \sqrt{2}$.

Teorema 2.1.19. *Convoluția este o operație (lege de compoziție) uniform continuă pe* $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$.

Demonstrație. Fie $F, G\in\mathcal{R}^+$ și ε arbitrar $0 < \varepsilon < 1$. Să alegem pe δ astfel încît să avem $0 < \delta < \operatorname{Min}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon^2}\right)$ și să presupunem că $F', G' \in \mathcal{R}^+$ sînt alese astfel încît să avem $d_{\mathcal{L}}(F, F') < \delta$ și $d_{\mathcal{L}}(G, G') < \delta$. Ținînd seama de observația de mai sus avem că pentru orice $x \in A_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ putem scrie $x - \frac{\delta}{2} > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{2} > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$ de unde deducem că $x - \frac{\delta}{2} - y \in A_\delta$ pentru $0 \leqslant y < x - \delta$ căci pe de altă parte $\delta < \frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon^2}$ implică $\frac{1}{\delta} > \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}$ iar $x\in A_\varepsilon$ implică $x < \frac{1}{\delta}$ deci $x - y - \frac{\delta}{2} < \frac{1}{\delta} < \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Deci avem

$$(F*G)\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant (F*G)(x-\delta) - \delta = \int_0^{x-\delta} F(x-\delta-y)\,dG(y) -$$

$$- \delta \leqslant \int_0^{x-\delta} \left\{F\left(x - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} - y\right) - \frac{\delta}{2}\right\} dG(y) - \frac{\delta}{2} \leqslant \int_0^{x-\delta} \left\{F'\left(x - \frac{\delta}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\delta}{2} - y\right) + \frac{\delta}{2}\right\} dG(y) - \frac{\delta}{2} \leqslant \int_0^{x-\delta} F'(x-y)\,dG(y) \leqslant \int_0^{x} F'(x-y)\,dG(y) =$$

$$= (F' * G)(x) = (G * F')(x),$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece convoluția este comutativă pe $\mathcal{R}^+$ (aceasta pentru că toate elementele lui $\mathcal{R}^+$ se anulează la $-\infty$ ceea ce nu se întîmplă pe $\mathcal{R}$).

De asemenea din $x \in A_\varepsilon$ și $d < \frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon^2}$ obținem că $x + \frac{\delta}{2} < \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{2+\varepsilon^2}{2\varepsilon} + \frac{\delta}{2} < \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ de unde rezultă că $x + \frac{\delta}{2} - y \in A_\delta$ dacă $0 \leqslant y < x$ și putem scrie că

$$\int_0^x G(x-y)\,dF'(y) = \int_0^x G\left(x + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} - y\right) dF'(y) \leqslant \int_0^x \left\{G'\left(x + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} - y\right) + \delta\right\} dF'(y) \leqslant \int_0^x G'(x+\delta-y)\,dF'(y) + \delta \leqslant \int_0^{x+\delta} G'(x+\delta-y)\,dF'(y) + \delta = (G'*F')(x+\delta) + \delta \leqslant (G'*F')\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rezultă din aceste inegalități și din observația 3) § 1.2 că relația $A(F*G, F'*G'; \varepsilon)$ este verificată și în mod analog relația $B(F*G, F'*G'; \varepsilon)$ adică avem că $d_{\mathcal{L}}(F*G, F'*G') < \varepsilon$ dacă $d_{\mathcal{L}}(F, F') < \delta$ și $d_{\mathcal{L}}(G, G') < \delta$ ceea ce este echivalent cu continuitatea convoluției pe $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$. Cum $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ este compact rezultă uniform continuitatea convoluției pe $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$.

Argumentele de mai sus pot fi utiilzate pentru a demonstra continuitatea în raport cu ambele variabile pe $(\mathcal{R}_v, d_L)$ (deci relativ la convergența slabă pe $\mathcal{R}_v$). Cum $d_{\mathcal{L}}(F, G) \leqslant d_L(F, G)$ pentru orice $F, G \in \mathcal{R}$ rezultă continuitatea convoluției în $(\mathcal{R}_v, d_{\mathcal{L}})$. Totuși convoluția nu este continuă, în raport cu ambele variabile, pe $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ căci, de exemplu, dacă luăm $F_n(x) = H_0(x-n)$ și $G_n = \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, atunci $F_n \xrightarrow{sl.} H_\infty = 0$, $G_n \xrightarrow{sl.} \frac{1}{2}$ dar $(G_n * F_n)(x) = \frac{1}{2}$ și $(G*F)(x) = 0$ adică $G_n * F_n \overset{sl.}{\not\to} G*F$.

Produsul de convoluție poate fi introdus și pe clasa $\mathcal{M}$ a funcțiilor cu variație mărginită cu proprietatea că $\int_{\mathbf{R}} dV(x) = 1$ pentru orice $V \in \mathcal{M}$ și o teorie corespunzătoare a decompozabilității are aplicații în radiotehnică. De asemenea teoria decompozabilității pe $\mathcal{R}_v$ conduce la posibilități mai simple pentru introducerea legii lui Maxwell cu privire la repartiția vitezei moleculelor pe baza unui număr mai mic de ipoteze față de calea obișnuită anterior în fizica statistică. Alte aplicații apar în introducerea și studiul legilor de repartiție a vitezei stelelor.

Diverse clase de convoluții generalizate au fost introduse de K. Urbanik [285], [286] al căror studiu prezintă aspecte noi odată cu amploarea luată de studiul semigrupurilor pe $\mathcal{R}$, oferită de scufundarea convoluției obișnuite în familia operațiilor binare date cu ajutorul copulelor.

Convoluțiile generalizate deschid noi perspective algebrelor de funcții înzestrate cu astfel de convoluții, o teorie corespunzătoare a funcțiilor caracteristice, a măsurilor indefinit divizibile și a teoriei decompozabilității [16]. Pentru introducerea lor se consideră $\mathcal{M}_p$ clasa măsurilor de probabilitate definite pe mulțimile boreliene de pe $[0, \infty)$ și se notează cu E_a, $a > 0$, măsura de probabilitate concentrată în punctul a. Pentru orice număr pozitiv a

Scanned with OKEN Scanner

se definește aplicația $T_a: \mathcal{M}_p \xrightarrow{pe} \mathcal{M}_p$ prin $(T_aP)(A) = P(a^{-1}A)$, unde $P \in \mathcal{M}_p$, A este orice mulțime boreliană și $a^{-1}A = \{a^{-1}x: x \in A\}$. De obicei, familia $\{T_a\}_{a>0}$ formează grup față de legea de compoziție dată de compunerea acestor aplicații și avem că $T_aT_b = T_{ab}$, $a, b > 0$. Vom defini T_0 prin $T_0P = E_0$ oricare ar fi $P \in \mathcal{M}_p$. Se verifică ușor că pentru orice funcție f continuă și mărginită are loc ecuația

$$(1) \qquad \int_0^\infty f(x)\,(T_aP)\,(\mathrm{d}x) = \int_0^\infty f(ax)\,P(\mathrm{d}x), \quad a \geqslant 0, \quad P \in \mathcal{M}_p$$

Se introduce convergența slabă, notată prin $P_n \xrightarrow{sl.} P$, a șirurilor de măsuri de probabilitate prin condiția

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(x)\,P_n(\mathrm{d}x) = \int_0^\infty f(x)\,P(\mathrm{d}x)$$

pentru orice funcție f continuă și mărginită.

Rezultă din această definiție și din (1) că avem $T_{a_n}P_n \xrightarrow{sl.} T_aP$ dacă $a_n \to a$ și $P_n \xrightarrow{sl.} P$ și în particular $T_{a_n}P_n \xrightarrow{sl.} E_0$ dacă $a_n \to 0$ și $P_n \xrightarrow{sl.} P$.

Definiția 2.1.23. Se numește *convoluție generalizată* orice operație binară comutativă și asociativă „$*'$" pe $\mathcal{M}_p$ care satisface condițiile

1) măsura E_0 este un element unitate, adică $E_0 *' P = P$ oricare ar fi $P \in \mathcal{M}_p$,

2) $(aP + bQ) *' R = a(P *' R) + b(Q *' R)$ oricare ar fi $P, Q, R \in \mathcal{M}_p$ și $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b = 1$ (liniaritate),

3) $(T_aP) *' (T_aQ) = T_a(P *' Q)$ pentru orice $P, Q \in \mathcal{M}_p$ și $a > 0$,

4) dacă $P_n \xrightarrow{sl.} P$ atunci $P_n *' Q \to P *' Q$ pentru orice $Q \in \mathcal{M}_p$,

5) există un șir de numere pozitive $c_1\ c_2, \ldots,$ astfel încît șirul $T_{c_n}E_1^{*'n} \xrightarrow{sl.} E_a \neq E_0$ (legea numerelor mari pentru măsuri concentrate într-un punct).

Exemple. Peste tot convoluția generalizată $P *' Q$ se va defini cu ajutorul funcționalei $\int_0^\infty f(x)\,(P *' Q)\,(\mathrm{d}x)$ pe mulțimea funcțiilor f mărginite și continue. Vom avea astfel:

1) *α-convoluția* $(0 < \alpha < \infty)$

$$\int_0^\infty f(x)\,(P *' Q)\,(\mathrm{d}x) = \int_0^\infty \int_0^\infty f((x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha})\,P(\mathrm{d}x)\,Q(\mathrm{d}y).$$

Pentru $\alpha = 1$ se obține convoluția obișnuită.

2) *∞-convoluția*

$$\int_0^\infty f(x)\,(P *' Q)\,(\mathrm{d}x) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\max(x, y))\,P(\mathrm{d}x)\,Q(\mathrm{d}y)$$

3) *$(\alpha, 1)$-convoluția* $(0 < \alpha < \infty)$

$$\int_0^\infty f(x)\,(P *' Q)\,(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty [f((x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}) + f(|x^\alpha - y^\alpha|)^{1/\alpha}]\,P(\mathrm{d}x)\,Q(\mathrm{d}y),$$

Scanned with OKEN Scanner

4) (α, β)-*convoluția* $(0 < \alpha < \infty,\ 1 < \beta < \infty)$

$$\int_0^\infty f(x)\,(P *' Q)\,(\mathrm{d}x) = \frac{\Gamma(\beta/2)}{\Gamma((\beta-1)/2)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-1}^1 f((x^{2\alpha} + y^{2\alpha} + 2x^\alpha y^\alpha z)^{1/2\alpha})\,\mathrm{d}z P(\mathrm{d}x)\,Q(\mathrm{d}y)$$

D. G. Kendall [135], [136] pornind de la observația că teorema de factorizare a lui Hincin împreună cu aritmetica impusă de convoluție pe $\mathcal{R}$ poate fi extinsă și la o clasă specială de semigrupuri ale așa ziselor șiruri reînnoitoare. Aceasta l-a condus la formularea și studierea unui sistem de axiome ce definesc o nouă categorie de semigrupuri care sînt supuse unei axiome similară teoremei limită centrală (pentru o aranjare triunghiulară a elementelor sale). Prin *aranjare triunghiulară* într-un semigrup $(\mathcal{S}, 0)$ înțelegem un sistem $u(i, j)$, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, i$ de elemente ale sale iar prin al m-lea *produs marginal* al aranjării date se înțelege produsul $u(m, 1)\ u(m, 2) \ldots \ldots u(m, m)$.

O aranjare triunghiulară se spune convergentă către un element $u \in \mathcal{S}$ dacă al m-lea produs marginal al ei converge către u.

Se spune că elementul $u \in \mathcal{S}$ este *nedecompozabil* dacă are proprietatea că el diferă de elementul unitate e, al lui $\mathcal{S}$, (cînd acesta există) și dacă $u = v \circ w$ atunci sau v sau w coincide cu e (celălalt factor fiind egal cu u) iar elementul u se numește *indefinit divizibil* cînd el posedă rădăcină de ordin k în $\mathcal{S}$ pentru orice $k = 2, 3, \ldots$. De exemplu, elementul unitate este de acest tip și în $\mathcal{S}$ pot să nu existe elemente nedecompozabile. Dacă $u \in \mathcal{S}$ nu este nedecomposabil atunci u se numește decompozabil.

Definiția 2.1.24. Se numește *semigrup delphic* orice semigrup $(\mathcal{S}, 0)$ topologic Hausdorff cu element unitate și care verifică în plus axiomele:

1) există un omomorfism continuu $h: \mathcal{S} \to ([0, \infty), +)$ astfel încît $h(u) = 0$ dacă și numai dacă u este element neutru,

2) mulțimea $\{u' : u' | u\}$ a factorilor fiecărui element $u \in \mathcal{S}$ este compactă,

3) dacă o aranjare triunghiulară din $\mathcal{S}$ converge către $u \in \mathcal{S}$ și satisface condiția $h(u)(i, j)) \to 0$ pentru $i \to \infty$ uniform relativ la $1 \leqslant j \leqslant i$, atunci u este indefinit divizibil.

O primă proprietate a semigrupurilor delphice este că orice element indefinit divizibil poate fi reprezentat ca și limită, de tipul precizat în 3) (care justifică asemănarea cu teorema limită centrală). Se poate arăta că elementele unui semigrup delphic se pot împărți în trei clase disjuncte: elemente decompozabile care posedă un factor nedecompozabil, elemente nedecompozabile și elemente indefinit divizibile fără factori nedecompozabili.

Se poate demonstra un rezultat similar teoremei de factorizare din $(\mathcal{R}, *)$ dată de Hincin, care va avea următorul conținut: orice element al unui semigrup delphic posedă cel puțin o reprezentare de forma $u = v_1 v_2 \ldots w$, unde v_i aparțin unei familii cel mult numărabile de elemente nedecompozabile iar w este indefinit divizibil și nu posedă nici un factor nedecompozabil.

Pentru a arăta existența semigrupurilor delphice menționăm că $\mathcal{S} = (0, 1]$ înzestrat cu operația de înmulțire obișnuită și cu topologia naturală indusă din $\mathbf{R}$ poate constitui un astfel de exemplu. În adevăr, luînd $h(u) = -\log u$ rezultă că 1) este trivial verificată iar $\{u' : u' \mid u\}$ este compactă căci coincide cu $[u, 1]$ deci și 2) este verificată. Orice element este indefinit divizibil așa că și 3) are loc, deci sistemul de axiome este consistent.

Scanned with OKEN Scanner

În scopul generalizării inegalității triunghiului pentru spații metrice probabiliste A. N Šerstnev ca [268], [269] formulează această inegalitate în limbajul semigrupurilor pe $\mathcal{R}$ introducînd noțiunea de *funcție triunghiulară* ca fiind orice aplicație $\tau: \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$ care posedă proprietățile:

1) $\tau(F, H_0) = F$ oricare ar fi $F \in \mathcal{R}^+$ iar $H_0(x) = 0$ pentru $x \leqslant 0$ și $H_0(x) = 1$ pentru $x > 0$,

2) $\tau(F_1, G_1) \geqslant \tau(F_2, G_2)$ dacă $F_1 \geqslant F_2$, $G_1 \geqslant G_2$,

3) $\tau(F, G) = \tau(G, F)$,

4) $\tau(\tau(F_1, F_2), F_3) = \tau(F_1, \tau(F_2, F_3))$.

Asemenea funcții pot fi construite cu ajutorul operațiilor binare T pe $[0, 1]$ printre care t-normele joacă un rol de seamă după cum a arătat însuși Šerstnev. Dintre funcțiile triunghiulare utilizate de el, în afară de $\tau(F, G) = F * G$, amintim familia τ_T definită prin

$$\tau_T(F, G; x) = \sup_{u+v=x} T(F(u), G(v))$$

în care alegînd în mod convenabil pe T obținem proprietăți importante pentru τ_T.

În acest scop să amintim că se spune că o t-normă T este continuă la stînga dacă

$$\lim_{x \to a^-,\, y \to b^-} T(x, y) = T(a, b) \text{ pentru orice } (a, b) \in [0, 1] \times [0, 1],\ (a, b) \neq (0, 0)$$

și un rezultat al lui Šerstnev este

Teorema 2.1.20. *Dacă T este o t-normă continuă la stînga atunci pentru orice $F, G \in \mathcal{R}^+$ rezultă că*

$$\tau_T(F, G; x) = \sup_{u+v=x} T(F(u), G(v)) \in \mathcal{R}^+$$

și este o funcție triunghiulară adică satisface proprietățile 1) — 4) *de mai sus.*

Demonstrație. Să notăm cu $F_1(x) = \tau_T(F, G; x)$ și să observăm că se verifică ușor că $0 \leqslant F_1(x) \leqslant 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, F_1 este nedescrescătoare pe $\mathbf{R}$ și $F(0) = 0$. Rămîne să arătăm că F_1 este continuă la stînga în care scop să considerăm $x_0 > 0$ și $\varepsilon > 0$ fixate. Dacă $F_1(x_0) = 0$ este evident că F_1 este continuă la stînga în x_0 (ceea ce se întîmplă pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}$ în cazul cînd $F = H_\infty$ sau $G = H_\infty$; $H_\infty(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$). Putem deci presupune că $F_1(x_0) > 0$ și întrucît $T(0, a) = 0$ pentru orice $a \in [0, 1]$ rezultă că există $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ astfel încît $u_0 + v_0 = x_0$, $F(u_0) \neq 0$, $G(x_0) \neq 0$ și

$$0 \leqslant F_1(x_0) - T(F(u_0), G(v_0)) < \varepsilon/2$$

Din continuitatea la stînga a lui T rezultă existența unui η, $0 < \eta \leqslant \leqslant \operatorname{Min}(F(u_0), G(v_0))$ astfel încît

$$0 \leqslant T(F(u_0), G(v_0)) - T(F(u_0) - \eta, G(v_0) - \eta) < \varepsilon/2$$

și cum F și G sînt și ele continue la stînga rezultă existența unui $\delta > 0$ astfel încît să avem

$$0 \leqslant F(u_0) - \eta < F(u_0 - \delta) \leqslant F(u_0),\ 0 \leqslant G(v_0) - \eta < G(v_0 - \delta) \leqslant G(v_0)$$

Scanned with OKEN Scanner

Utilizînd acum proprietatea lui T de a fi nedescrescătoare obținem

$$0 \leqslant T(F(u_0),\ G(v_0)) - T(F(u_0 - \delta),\ G(v_0 - \delta)) < \varepsilon/2$$

Combinînd prima și ultima relație de mai sus precum și definiția lui $F_1(x_0 - 2\delta)$ putem scrie că

$$0 \leqslant F_1(x_0) - F_1(x_0 - 2\delta) \leqslant F_1(x_0) - T(F(u_0 - \delta), G(v_0 - \delta)) =$$

$$= F_1(x_0) - T(F(u_0), G(v_0)) + T(F(u_0),\ G(v_0)) - T(F(u_0 - \delta),\ G(v_0 - \delta)) < \varepsilon$$

adică F_1 este continuă la stînga în x_0. Cum x_0 este arbitrar rezultă că $\tau_T(F, G; x) \in \mathcal{R}^+$.

În ceea ce privește verificarea proprietăților 1) — 3) acestea rezultă printr-un calcul simplu. Să ne ocupăm în detaliu de verificarea proprietății 4) și anume să observăm că din continuitatea la stînga și monotonia lui T rezultă că pentru orice submulțime $A \subseteq [0, 1]$, $a = \sup A$ și oricare ar fi $b \in [0, 1]$ avem

$$\sup_{x \in A} T(x, b) = T(a, b) \quad .$$

Din această relație și asociativitatea t-normei T rezultă că oricare ar fi $G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{R}^+$ avem că

$$\tau_T(\tau_T(G_1, G_2), G_3; x) = \sup_{u+v=x} T(\tau_T(G_1, G_2; u), G_3(v)) =$$

$$= \sup_{u+v=x} T(\sup_{s+t=u} T(G_1(s), G_2(t)), G_3(v)) = \sup_{u+v=x} \sup_{s+t=u} T(T(G_1(s), G_2(t)), G_3(v)) =$$

$$= \sup_{s+t+v=x} T(T(G_1(s), G_2(t)), G_3(v)) = \sup_{s+t+v=x} T(G_1(s),\ T(G_2(t), G_3(v)) =$$

$$= \sup_{s+w=x} T(G_1(s), \sup_{t+v=w} T(G_2(t), G_3(v))) = \sup_{s+w=x} T(G_1(s),\ \tau_T(G_2, G_3; w)) =$$

$$= \tau_T(G_1, \tau_T(G_2, G_3); x)$$

deci asociativitatea lui τ_T și teorema este demonstrată.

Rezultă astfel că pentru orice t-normă T, continuă la stînga, $(\mathcal{R}^+, \tau_T)$ este un semigrup comutativ cu unitate (H_0), cu element anihilator (H_∞) și operația τ_T păstrează ordinea naturală din $\mathcal{R}^+$. Vom arăta că este chiar un semigrup topologic, ocupîndu-ne de continuitatea lui τ_T în $(\mathcal{R}^+, d_\mathcal{D})$.

Înainte de aceasta examinînd posibilitatea de a defini cu ajutorul lui τ_T o operație binară pe $\mathcal{R}$ avem următorul

Corolar. *Dacă $F, G \in \mathcal{R}$ și T este o t-normă continuă la stînga atunci $\tau_T(F, G) \in \mathcal{R}$.*

Cu privire la continuitatea lui τ_T ca funcție pe $\mathbf{R}$, respectiv ca funcție de două variabile pe $\mathcal{R}^+$ avem:

Teorema 2.1.21. 1) *Dacă T este o t-normă continuă și cel puțin una dintre funcțiile $F, G \in \mathcal{R}$ este continuă atunci funcția $\tau_T(F, G)$ definită pe $\mathbf{R}$ este continuă.*

2) *Continuitatea t-normei T implică uniform continuitatea funcției τ_T (ca funcție de două variabile) pe spațiul metric $(\mathcal{R}^+, d_\mathcal{D})$.*

Demonstrație. Deși există o demonstrație directă pentru prima parte [250] în ipoteza de continuitate pentru ambele funcții $F, G \in \mathcal{R}^+$, preferăm

Scanned with OKEN Scanner

demonstrația dată de R. Moynihan [180] sub forma mai generală, dată mai sus, și care oferă într-un anumit sens o posibilitate de comparare a operațiilor τ_T cu operația de convoluție pe $\mathcal{R}$.

Fie $F \in \mathcal{R}$ și să notăm respectiv prin

$C(F) = \{x \in \mathbf{R}: F \text{ este continuă în } x\}$,

$D(F) = \{x \in \mathbf{R}: F \text{ este discontinuă în } x\}$,

$D(F) + D(G) = \{u + v: u \in D(F), v \in D(G), F, G \in \mathcal{R}\}$.

Întrucît orice $F \in \mathcal{R}$ este o funcție nedescrescătoare rezultă că mulțimile $D(F)$ și $D(F) + D(G)$ sînt cel mult numărabile deci există I, cardinalul lui I este cel mult egal cu al mulțimii numerelor naturale $\mathbf{N}$, adică card $(I) \leqslant$ $\leqslant$ card $(\mathbf{N}) = \aleph_0$, astfel încît $D(F) = \{x_i\}_{i \in I}$. Componenta discretă a lui F va fi

$$F_d(x) = \sum_{x_i < x} (F(x_i +) - F(x_i)) \text{ cu } F(x_i +) = \lim_{x \to x_i, x > x_i} F(x)$$

iar F admite o descompunere unică sub forma

$$F(x) = F_d(x) + F_c(x)$$

unde F_c este componenta continuă care fiind nedescrescătoare și mărginită este uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

Să demonstrăm că dacă T este o t-normă continuă și notăm cu $F_1 = \tau_T(F, G)$ atunci avem

$$D(F_1) \subseteq D(F) + D(G) \tag{1}$$

În acest scop să observăm că T fiind uniform continuă pe $[0, 1] \times [0, 1]$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\eta > 0$ astfel încît să avem

$$|T(a, b) - T(a', b')| < \varepsilon \text{ dacă } |a - a'| < \eta \text{ și } |b - b'| < \eta \tag{2}$$

Fie $D(F) = \{x_i\}_{i \in I}$, $D(G) = \{y_j\}_{j \in J}$, card (I), card $(J) \leqslant \aleph_0$, atunci întrucît $\sum_{i \in I} (F(x_i +) - F(x_i)) \leqslant 1$ și $\sum_{j \in J} (G(y_j +) - G(y_j)) \leqslant 1$ rezultă că există submulțimile finite I', J', $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J$ astfel încît să avem

$$\sum_{i \in I - I'} (F(x_i +) - F(x_i)) < \frac{\eta}{2} \text{ și } \sum_{j \in J - J'} (G(y_j +) - G(y_j)) < \frac{\eta}{2}. \tag{3}$$

În acest caz pentru orice $x > y$ cu proprietatea $F_d(x) \geqslant F_d(y) + \frac{\eta}{2}$, există $x_i \in D(F)$ cu $i \in I'$ astfel încît $y \leqslant x_i < x$ și în mod asemănător dacă $G_d(x) \geqslant$ $\geqslant G_d(y) + \frac{\eta}{2}$ există $y_j \in D(G)$ cu $j \in J'$ astfel încît să avem $y \leqslant y_j < x$.

Dacă vom considera un x cu proprietatea $x \notin D(F) + D(G)$ atunci cum I' și J' sînt finite rezultă că există un $\delta > 0$ astfel încît segmentul $[x - \delta, x + \delta]$ nu conține nici un punct de forma $x_i + y_j$ cu $i \in I'$, $j \in J'$ și întrucît F_c și G_c sînt uniform continue există $\gamma > 0$ și $\zeta > 0$ astfel ca

$$|F_c(u_1) - F_c(u_2)| < \frac{\eta}{2} \text{ pentru } |u_1 - u_2| < \gamma \tag{4}$$

și

$$|G_c(v_1) - G_c(v_2)| < \frac{\eta}{2} \text{ pentru } |v_1 - v_2| < \gamma \tag{4'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm un h, $0 < h < \min(\gamma, \zeta, \delta)$, să alegem punctele u și v astfel încît $u + v = x$ și să considerăm $T(F(u + h), G(v))$. Atunci sînt posibile două cazuri:

a) $F_d(u + h) - F_d(u) < \frac{\eta}{2}$ cînd ținînd seama de descompunerea lui F și de relația (4) avem

$$|F(u + h) - F(u)| \leqslant |F_c(u + h) - F_c(u)| + |F_d(u + h) - F_d(u)| < \eta$$

care împreună cu (2) ne dă

$$|T(F(h + u), G(v)) - T(F(u), G(v))| < \varepsilon$$

adică putem scrie

$$F_1(x) \geqslant T(F(u), G(v)) > T(F(u + h), G(v)) - \varepsilon$$

b) $F_d(u + h) - F_d(u) \geqslant \frac{\eta}{2}$ atunci din modul cum a fost ales x rezultă că există $x_i \in D(F)$ cu $i \in I'$ astfel încît $u \leqslant x_i < u + h$. În acest caz avem că $G_d(v) - G_d(v - h) < \frac{\eta}{2}$ căci altfel ar exista $y_j \in D(G)$ cu $j \in J'$ astfel încît $v - h \leqslant y_j < v$ de unde ar rezulta că $u + v - h \leqslant x_i + y_j < u + v + h$ adică $x - h \leqslant x_i + y_j < x + h$ ceea ce ar contrazice definiția lui δ și alegerea lui $h < \delta$. Rezultă deci, folosindu-ne de (4'), că

$$|G(v) - G(v - h)| \leqslant |G_c(v) - G_c(v - h)| + |G_d(v) - G(v - h)| < \eta$$

și care împreună cu (2) ne dă

$$|T(F(u + h), G(v)) - T(F(u + h), G(v - h))| < \varepsilon$$

așa că putem scrie

$$F_1(x) \geqslant T(F(u + h), G(v - h)) > T(F(u + h), G(v)) - \varepsilon$$

Prin urmare pentru orice u, v cu proprietatea $u + v = x$

$$F_1(x) > T(F(u + h), G(v)) - \varepsilon$$

de unde rezultă că

$$F_1(x) \geqslant \sup_{u+v=x} T(F(u + h), G(v)) - \varepsilon = \sup_{a+b=x+h} T(F(a), G(b)) - \varepsilon = F_1(x + h) - \varepsilon$$

ceea ce este echivalent cu continuitatea la dreapta a lui F_1 iar din corolarul de mai sus $F_1 \in \mathcal{R}$ deci este continuă în x. Rezultă că pentru mulțimea $D(F) + D(G)$ vom avea incluziunea inversă adică relația (1) este demonstrată, ea prezentînd importanță și în sine.

Din această relație și din ipoteza că cel puțin una dintre funcțiile $F, G \in \mathcal{R}$ este continuă deducem continuitatea funcției $F_1 = \tau_T(F, G)$ întrucît dacă una dintre mulțimile $D(F)$ sau $D(G)$ este vidă rezultă că $D(F) + D(G)$ este vidă, deci $D(F_1)$ este vidă iar $C(F_1) = \mathbf{R}$ și prima parte a teoremei este demonstrată.

Pentru a demonstra partea a doua să considerăm $F, G \in \mathcal{R}^+$, $\varepsilon > 0$ cu $0 < \varepsilon < 1$. Din ipoteza de continuitate a lui T pe compactul $[0, 1] \times [0, 1]$

rezultă uniform continuitatea sa și deci putem alege un δ, $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ astfel încît să avem

$$|T(a+h,\ b+k) - T(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dacă } |h| < \delta,\ |k| < \delta,$$

oricare ar fi $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Fie $F', G' \in \mathcal{R}^+$ și astfel încît să avem

$$d_{\mathcal{L}}(F, F') < \delta \text{ și } d_{\mathcal{L}}(G, G') < \delta$$

atunci pentru $u, v \in A_\delta = \left(\frac{\delta}{2},\ \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta}\right)$ vom avea

$$F'\left(u - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\delta}{2} \leqslant F\left(u + \frac{\delta}{2}\right) + \frac{\delta}{2},\quad F\left(u - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\delta}{2} \leqslant F'\left(u + \frac{\delta}{2}\right) + \frac{\delta}{2}$$

și în mod asemănător schimbînd pe u cu v obținem relațiile corespunzătoare pentru G și G'. Întrucît T este nedescrescătoare rezultă că pentru $u, v \in A_\delta$ avem

$$T\left(F'\left(u - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\delta}{2},\ G'\left(v - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\delta}{2}\right) \leqslant T\left(F\left(u + \frac{\delta}{2}\right) + \frac{\delta}{2},\ G\left(v + \frac{\delta}{2}\right) + \frac{\delta}{2}\right)$$

din care rezultă

$$T\left(F'\left(u - \frac{\delta}{2}\right),\ G'\left(v - \frac{\delta}{2}\right)\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant T\left(F\left(u + \frac{\delta}{2}\right),\ G\left(v + \frac{\delta}{2}\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Dacă notăm prin

$$W = \left\{(u, v) : u + v = x,\ u \geqslant \frac{\delta}{2},\ v \geqslant \frac{\delta}{2},\ u, v \in A_\delta\right\},$$

pentru orice $x \in A_\varepsilon$, putem scrie că

$$\sup_W T\left(F'\left(u - \frac{\delta}{2}\right),\ G'\left(v - \frac{\delta}{2}\right)\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sup_W T\left(F\left(u + \frac{\delta}{2}\right),\ G\left(v + \frac{\delta}{2}\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pe de altă parte din condiția $\delta < \frac{\varepsilon}{2} < 1$ și ținînd seama de observația ce precede teorema 2.1.19 avem că $A_\varepsilon \subseteq A_\delta$. Astfel pentru $x \in A_\varepsilon$ rezultă că orice pereche (u, v) ce satisface condiția $u \geqslant \frac{\delta}{2}$, $v \geqslant \frac{\delta}{2}$, și $u + v = x$ are proprietatea $u, v \in A_\delta$ (ceea ce nu mai are loc în cazul $F, G \in \mathcal{R}$ cînd u, v pot lua și valori negative). Din acest motiv inegalitatea de mai sus devine

$$\sup_{u - \frac{\delta}{2} + v - \frac{\delta}{2} = x - \delta,\ u \geqslant \frac{\delta}{2},\ v \geqslant \frac{\delta}{2}} T\left(F'\left(u - \frac{\delta}{2}\right),\ G'\left(v - \frac{\delta}{2}\right)\right) -$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sup_{u + v = x,\ u \geqslant \frac{\delta}{2},\ v \geqslant \frac{\delta}{2}} T\left(F\left(u + \frac{\delta}{2}\right),\ G\left(v + \frac{\delta}{2}\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

De fapt partea stîngă a acestei relații coincide cu $\tau_T\left(F', G'; x - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}$ iar partea dreaptă este mai mică sau egală cu $\tau_T(F, G; x + \delta) + \frac{\varepsilon}{2}$ deoarece $\left\{(u, v): u + v = x,\ u \geqslant \frac{\delta}{2},\ v \geqslant \frac{\delta}{2}\right\} \subseteq \left\{(u, v): u + \frac{\delta}{2} + v + \frac{\delta}{2} = x + \delta, u + \frac{\delta}{2} \geqslant 0, v + \frac{\delta}{2} \geqslant 0\right\}$ și întrucît $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $x \in A_\varepsilon$, avem

$$\tau_T\left(F', G'; x - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \tau_T\left(F, G; x + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

și analog obținem

$$\tau_T\left(F, G; x - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \tau_T\left(F', G'; x + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deducem astfel că

$$d_{\mathcal{L}}(\tau_T(F, G), \tau_T(F', G')) < \varepsilon$$

dacă $d_{\mathcal{L}}(F, F') < \delta$, $d_{\mathcal{L}}(G, G') < \delta$ adică τ_T este continuă în (F, G).

Cum în § 1.2 am arătat că $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$ este un spațiu metric compact rezultă că τ_T este uniform continuă pe $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$ și teorema este complet demonstrată.

Corolar. *Dacă T este o t-normă continuă și cel puțin una dintre funcțiile $F, G \in \mathcal{R}^+$ este continuă pe $(0, \infty)$ dar $F(0+) > 0$ sau $G(0+) > 0$ atunci $\tau_T(F, G)$ este continuă pe $(0, \infty)$.*

Pentru demonstrarea acestui corolar considerăm funcțiile

$$F^*(x) = \begin{cases} F(x) & \text{pentru } x > 0, \\ F(0+) & \text{pentru } x = 0, \end{cases} \qquad G^*(x) = \begin{cases} G(x) & \text{pentru } x > 0, \\ G(0+) & \text{pentru } x = 0, \end{cases}$$

și vom obține că funcția F_1^* definită prin $F_1^*(x) = \sup_{u+v=x} T(F^*(u), G^*(v))$ este continuă pe $[0, \infty]$ și cum pentru orice $x > 0$, $F_1^*(x) = \tau_T(F, G; x)$ corolarul este demonstrat.

Cu privire la posibilitatea comparării operațiilor τ_T cu operația de convoluție menționăm că în cazul acesteia din urmă continuitatea unuia dintre factorii F sau G implică continuitatea lui $F * G$ [153], [250] deci relația demonstrată mai sus $D(\tau_T(F, G)) \subseteq D(F) + D(G)$ stabilește o asemănare cu cazul convoluției (cînd are loc cu egalitate). În cazul operației τ_T incluziunea poate fi chiar strictă, adică τ_T poate fi continuă chiar dacă $F, G \in \mathcal{R}_v^+$ sînt ambele discontinue [180].

Cu privire la proprietatea decompozabilității elementelor apar probleme similare cu cazul convoluției. Și aici se face abstracție de elementele triviale H_a deoarece orice element $F \in \mathcal{R}$ admite o descompunere de forma $F = \tau_T(F_{-a}, H_a)$ unde $F_{-a}(x) = F(x - a)$. În cazul convoluției se dau condiții simple, bazate pe proprietatea $D(F * G) = D(F) + D(G)$ care asigură nedecompozabilitatea unui element. De exemplu, funcțiile de repartiție de tip discret pentru care toate diferențele dintre abscisele punctelor de discontinuitate iau valori distincte între ele sînt nedecompozabile. În cazul τ_T-semigrupurilor relația de mai sus avînd loc numai cu incluziune, uneori chiar strictă, nu se mai pot utiliza considerentele din cazul $*$ - semigrupurilor.

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 2.1.10. [180] *Fie T o t-normă continuă cu proprietatea că pentru $\delta > 0$ avem $T(\delta, \delta) > 0$. Dacă $F \in \mathcal{R}$, există $a, b \in D(F)$ cu $a < b$ și astfel încît $F(a) = 0$, $F(b+) = 1$ iar $T(F(b), F(b)) < F(a+)$ atunci F este nedecompozabilă în $(\mathcal{R}, \tau_T)$.*

Din ipoteza asupra lui T rezultă în particular că dacă T este o t-normă strictă propoziția este verificată și chiar mai mult avem următorul

Corolar. *Dacă T este o t-normă strictă iar F este o funcție de repartiție discretă cu proprietatea $D(F) = \{a, b\}$ și $F(a) = 0$, $F(b+) = 1$ atunci F este nedecompozabilă în $(\mathcal{R}, \tau_T)$.*

Acest corolar ne sugerează o clasă simplă de elemente nedecompozabile în $(\mathcal{R}, \tau_T)$. Aceste proprietăți nu se mai mențin pentru t-normele nestricte cum este exemplul t-normei $T = \text{Min}$ cînd orice element $F \in \mathcal{R}$ poate fi decompozabil căci $F_1(x) = F(x/2)$ este rădăcina pătrată a lui F după cum rezultă din comentariul ce succede propoziția 2.1.10.

Problema regulii de simplificare sau reducere în $(\mathcal{R}, \tau_T)$ are soluția dată de

Teorema 2.1.22. 1) *Regula de simplificare nu are loc în $(\mathcal{R}, \tau_T)$ pentru orice t-normă continuă T adică $\tau_T(F, G') = \tau_T(F, G'')$ nu implică în general $G' = G''$.*

2) *În τ_T-semigrupul $(\mathcal{R}_v, \tau_{\text{Min}})$ are loc regula de simplificare* [180].

În această a doua parte a prezentului subparagraf să ne ocupăm de o clasă de funcții triunghiulare care într-un anumit sens sînt duale funcțiilor τ_T. Acest tip de funcții triunghiulare sînt utilizate îndeosebi în teoria relațiilor „între" definite în spații metrice probabiliste. Ele de fapt sînt acele funcții triunghiulare care sînt generate de t-conorme.

Am văzut în § 2 din capitolul I că pentru orice t-normă T se definește o t-conormă a sa T^* dată prin $T^*(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$ și reciproc, oricărei t-conorme S i se asociază o t-normă S^* dată prin $S^*(a, b) = 1 - S(1 - a, 1 - b)$. Dacă T este continuă la stînga atunci T^* este continuă la dreapta și reciproc, t-norma unei t-conorme continue la dreapta este continuă la stînga deci dacă un membru al perechii (T, T^*) sau (S, S^*) este continuu rezultă și continuitatea celuilalt.

De asemenea avem $(T^*)^* = T$ și $(S^*)^* = S$.

Rezultă din cele de mai sus că orice funcție triunghiulară τ pe $\mathcal{R}^+$ induce o *funcție cotriunghiulară* $\bar{\tau}$, pe mulțimea $\mathcal{G}^+ = \{F^t,\ F^t(x) = 1 - F(x),\ x \in \mathbf{R},\ F \in \mathcal{R}^+\}$, dată prin

$$\bar{\tau}(F^t, G^t) = 1 - \tau(F, G) = [\tau(F, G)]^t$$

(notația cu exponentul t provine de la utilizarea noțiunii de „the tail of F" dată prin $F^t(x) = 1 - F(x)$, $x \in \mathbf{R}$).

Funcția $\bar{\tau}$ satisface condițiile 2), 3), 4) din definiția lui τ împreună cu proprietatea $\bar{\tau}(F^t, H^t) = F^t$ și are loc și dualitatea corespunzătoare în sensul că $\bar{\bar{\tau}}(F, G) = 1 - \bar{\tau}(F^t, G^t) = \tau(F, G)$ adică $\bar{\bar{\tau}} = \tau$.

Această operație sugerează definirea unei involuții pe spațiul funcțiilor triunghiulare în care scop amintim

Teorema 2.1.23. *Dacă S este o t-conormă continuă la stînga atunci funcția τ_S definită pentru orice $F, G \in \mathcal{R}^+$ și pentru orice $x \in \mathbf{R}$ prin*

$$\tau_S(F, G; x) = \inf_{u+v=x} S(F(u), G(v))$$

este o funcție triunghiulară.

Scanned with OKEN Scanner

Cu privire la definirea unei involuții să observăm că pe mulțimea $\mathcal{S}$ a funcțiilor triunghiulare de forma τ_T sau τ_S se poate defini o aplicație „$*$" prin $\tau_T^* = \tau_{T^*}$ și $\tau_S^* = \tau_{S^*}$, pentru orice t-normă T și orice t-conormă S, care este o involuție pe $\mathcal{S}$ deoarece avem

$$(\tau_T^*)^* = \tau_T \text{ și } (\tau_S^*)^* = \tau_S$$

Aceste noi operații τ_S definesc o altă familie de semigrupuri topologice pe $\mathcal{R}^+$ deoarece avem

Teorema 2.1.24. *Dacă S este o t-conormă continuă atunci τ_S este uniform continuă pe $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$.*

Demonstrație. Raționamentul este asemănător celui din demonstrația cazului τ_T-semigrupurilor (teorema 2.1.21) fiind mai convenabil să lucrăm cu forma echivalentă a lui $A(F, G; h)$ dată prin

$$F\left(x - \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} \leqslant G\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \quad \text{pentru} \quad -\frac{h}{2} - \frac{1}{h} < x < \frac{h}{2} + \frac{1}{h}$$

Vom nota cu $A_h = \left(-\frac{h}{2} - \frac{1}{h}, \frac{h}{2} + \frac{1}{h}\right)$ și $W = \left\{(u, v): u + v = x, u + \frac{\delta}{2} \geqslant 0, v + \frac{\delta}{2} \geqslant 0, u, v \in A_\delta\right\}$ și vom obține pentru orice $x \in A_\varepsilon$ că

$$\inf_W S\left(F'\left(u - \frac{\delta}{2}\right), G'\left(u - \frac{\delta}{2}\right)\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \inf_W S\left(F\left(u + \frac{\delta}{2}\right), G\left(u + \frac{\delta}{2}\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

și cum $A_\varepsilon \subseteq A_\delta$ rezultă că pentru $x \in A_\varepsilon$ mulțimea perechilor (u, v) astfel încît $u + \frac{\delta}{2} \geqslant 0$, $v + \frac{\delta}{2} \geqslant 0$ și $u + v = x$ satisface condiția că $u, v \in A_\delta$. Din acest motiv obținem

$$\inf_W S\left(F'\left(u - \frac{\delta}{2}\right), G'\left(v - \frac{\delta}{2}\right)\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \tau_S(F, G; x + \delta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pe de altă parte avînd $\left\{(u, v): u + v = x, u \geqslant \frac{\delta}{2}, v \geqslant \frac{\delta}{2}\right\} \subseteq W$ obținem că $\tau_S(F, G; x - \delta) \leqslant \inf_W S\left(F'\left(u - \frac{\delta}{2}\right), G'\left(v - \frac{\delta}{2}\right)\right)$ restul raționamentelor fiind similare cu cele din teorema 2.1.21.

În încheierea acestui subparagraf să arătăm că inegalitatea cunoscută $T \leqslant S$ oricare ar fi t-norma T și t-conorma S se extinde la funcțiile triunghiulare τ_T și τ_S obținînd că $\tau_T \leqslant \tau_S$.

În adevăr, oricare ar fi $F, G \in \mathcal{R}^+$ obținem că

$$T(F(u), G(v)) \leqslant S(F(u), G(v))$$

pentru orice $u, v \in \mathbf{R}$ deci pentru orice $x \in \mathbf{R}$ putem scrie că $\tau_T(F, G; x) =$

$$= \sup_{u+v=x} T(F(u), G(v)) \leqslant \inf_{u+v=x} S(F(u), G(v)) = \tau_S(F, G; x).$$

Scanned with OKEN Scanner

O clasă de funcții triunghiulare, deci de semigrupuri pe $\mathcal{R}^+$, care este utilă în studiul structurilor produs de spații metrice probabiliste, care au aplicații în teoria generală a informației, este clasa π_T definită cu ajutorul t-normelor T prin

$$\pi_T(F, G; x) = T(F(x), G(x)), \quad x \in \mathbf{R}, \quad F, G \in \mathcal{R}^+$$

Vom avea

Teorema 2.1.25. 1) *Dacă T este o t-normă continuă la stînga atunci π_T este o funcție triunghiulară.*

2) *Dacă t-norma T este continuă atunci $\pi_T: \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+ \to \mathrm{R}^+$ este uniform continuă pe spațiul metric $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$.*

Demonstrație. 1) Din faptul că F, G și T sînt monoton nedescrescătoare și continue la stînga rezultă că și π_T are aceste proprietăți iar din faptul că $\pi_T(F(0), G(0)) = T(F(0), G(0)) = T(0, 0) = 0$ rezultă că $\pi_T \in \mathcal{R}^+$. Proprietățile din definiția t-normei T implică asupra lui π_T condițiile 1) — 4) din definiția funcției triunghiulare (§ 1.4) ceea ce demonstrează complet prima parte a teoremei. Rezultă că dacă T este o t-normă continuă iar F, $G \in \mathcal{R}^+$ sînt continue (sau continue pe $(0, \infty)$) atunci $\pi_T(F, G)$ este și ea o funcție continuă pe $\mathbf{R}$ (sau continuă pe $(0, \infty)$).

2) Pentru a demonstra partea a doua fie F, $G \in \mathcal{R}^+$ iar $C(F)$, $C(G)$ mulțimea punctelor de continuitate ale lui F și respectiv G. Se știe că $C(F) \cap C(G)$ este densă în $\mathbf{R}$. Să considerăm două șiruri arbitrare $\{F_n\}$, $\{G_n\}$ de elemente din $\mathcal{R}^+$ care posedă proprietatea $d_{\mathcal{L}}(F_n, F) \to 0$, $d_{\mathcal{L}}(G_n, G) \to 0$ cînd $n \to \infty$. Atunci conform proprietăților, stabilite în teorema 2.1.18, rezultă că $F_n \xrightarrow{sl.} F$ și $G_n \xrightarrow{sl.} G$ adică pentru orice $x \in C(F) \cap C(G)$ avem $F_n(x) \to F(x)$ și $G_n(x) \to G(x)$, $n \to \infty$. Folosind continuitatea lui T deducem că

$$\pi_T(F_n, G_n; x) = T(F_n(x), G_n(x)) \to T(F(x), G(x)) = \pi_T(F, G; x)$$

adică $\pi_T(F_n, G_n) \xrightarrow{sl.} \pi_T(F, G)$ deci $d_{\mathcal{L}}(\pi_T(F_n, G_n), \pi_T(F, G)) \to 0$, $n \to \infty$, ceea ce este echivalentă cu continuitatea lui π_T în metrica $d_{\mathcal{L}}$ iar uniform continuitatea rezultă din proprietatea că $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$ este un spațiu metric compact (teorema 2.1.18) și teorema enunțată este demonstrată.

În încheiere menționăm că pot fi considerate familii speciale de t-norme de exemplu dacă $\{T_s : s \in \mathbf{R}^+\}$ este o familie continuă, de un parametru, formată din t-norme continue la stînga și astfel încît $T_{s_1} \leqslant T_{s_2}$ pentru $s_1 < s_2$, atunci funcția π dată prin

$$\pi(F, G; s) = T_s(F(s), G(s))$$

este o funcție triunghiulară, care în cazul continuității fiecărui element T_s este uniform continuă pe $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$.

§ 2. OPERAȚII INTERNE PE $\mathcal{R}$ INDUSE DE COPULE

În paragraful anterior ne-am ocupat de operații interne pe $\mathcal{R}$ care definesc semigrupuri topologice și au importante aplicații în studiul structurilor probabiliste. Existînd și structuri probabiliste formulate direct cu ajutorul variabilelor aleatoare precum și diverse operații și aplicații pe $\mathcal{L}$, apare naturală

Scanned with OKEN Scanner

problema conexiunilor dintre operațiile pe $\mathcal{L}$ și cele de pe $\mathcal{R}$. O metodă interesantă este aceea oferită de teoria copulelor dezvoltată de A. Sklar [264], [265], A. Sklar și B. Schweizer [249], [247], [250], M. J. Frank [81] și parțial expusă în subparagraful 1.1 al acestui capitol. Astfel se introduc σ_c-operațiile [265] care se deduc pe o cale naturală din operația de adunare pe $\mathcal{L}$ și o copulă arbitrară C, care conțin ca un caz particular convoluția. Desigur că și alte operații mai generale pot induce operații corespunzătoare pe $\mathcal{R}$ folosind funcții măsurabile Borel și o copulă C sau metode similare operațiilor τ_T și π_T înlocuind pe T cu o copulă C.

În acest paragraf după ce definim și analizăm proprietăți ale σ_c-operațiilor pe $\mathcal{R}$ ne ocupăm de studiul operațiilor σ_c asociative arătînd că o clasă destul de săracă dintre acestea poate defini semigrupuri pe $\mathcal{R}$ și anume numai σ_{Prod}, σ_{Min} și σ_C cu C o sumă ordinală de Prod și Min. În partea a doua ne ocupăm de problema operațiilor pe $\mathcal{R}$ care nu derivă din operații pe $\mathcal{L}$ arătînd astfel că analiza matematică pe $\mathcal{R}$ este mult mai bogată decît ceea ce oferă teoria măsurii, adică funcțiile $\mathcal{K}$ — măsurabile ce formează de altfel clasa variabilelor aleatoare pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Aceste rezultate oferă interpretări cu importante aplicații în teoria structurilor probabiliste și în teoria informației.

2.1. σ_C OPERAȚII PE $\mathcal{R}$ ȘI SOLUȚII ALE ECUAȚIEI ASOCIATIVITĂȚII PE $\mathcal{R}$

Vom face din nou precizările de notații cu care lucrăm în acest paragraf, introducem σ_c-operațiile ca un caz particular al operațiilor induse de copule și funcții reale de două variabile măsurabile Borel, definite pe $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ și stabilim clasa σ_c-operațiilor asociative. Cu acest prilej stabilim și alte proprietăți pentru copule sau pentru operațiile τ_C și π_C.

Peste tot în acest paragraf vom nota prin $\mathcal{R} = \{F: [-\infty, \infty] \to [0, 1]$, nedescrescătoare, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$ și continue la stînga pe $(-\infty, \infty)\}$ și facem observația că nici o proprietate esențială nu depinde de normalizarea particulară făcută (de a fi continuă la stînga). Dacă notăm prin $\sup F = \lim_{x \to \infty} F(x)$, $\inf F = \lim_{x \to -\infty} F(x)$, amintim că $\mathcal{R}_v = \{F \in \mathcal{R}: \inf F = 0, \sup F = 1\}$, $\mathcal{R}^+ = \{F \in \mathcal{R}: F(0) = 0\}$ și $\mathcal{R}_v^+ = \mathcal{R}_v \cap \mathcal{R}^+$. Dacă $X: (\Omega, \mathcal{K}, P) \to [-\infty, \infty]$ este $\mathcal{K}$-măsurabilă, X este o variabilă aleatoare iar $F_X(x) = P(\{\omega: X(\omega) < x\})$ este funcția sa de repartiție și aparține la $\mathcal{R}$. În cazul cînd X este finită $F_X \in \mathcal{R}_v$ iar dacă X este nenegativă $F_X \in \mathcal{R}^+$ sau dacă este și finită $F_X \in \mathcal{R}_v^+$.

Fiind date două variabile aleatoare X, Y cu funcțiile de repartiție corespunzătoare F_X, F_Y și funcția lor de repartiție comună F_{XY} iar C_{XY} copula de legătură a variabilelor X, Y să dăm mai întîi

Propoziția 2.2.1. *Fie g o funcție reală de două variabile și măsurabilă Borel. Atunci $g(X, Y)$ este o variabilă aleatoare reală a cărei funcție de repartiție este dată prin*

$$(1)\quad F_{g(X,Y)}(x) = \iint_{g(u,v)<x} \mathrm{d}C_{XY}(F_X(u), F_Y(v)) \quad \textit{oricare ar fi } x \in \overline{\mathbf{R}}$$

Demonstrație. Fie $Z = (X, Y)$ variabila aleatoare bidimensională definită de X și Y, atunci $h = g \circ Z = g(X, Y): \Omega \to \mathbf{R}$ și trebuie să arătăm că $h^{-1}(B) \in \mathcal{K}$ oricare ar fi $B \in \mathcal{B}^1$. Însă $h^{-1}(B) = Z^{-1}(g^{-1}(B))$ și $A = g^{-1}(B) \in \mathcal{B}^2$ căci $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este măsurabilă Borel și $Z^{-1}(A) \in \mathcal{K}$ oricare ar fi $A \in B^2$ căci Z este variabilă aleatoare bidimensională. Pe de altă parte avem că

$$F_h(x) = F_{g(X,Y)}(x) = \iint_{g(u,v)<x} \mathrm{d}F_{XY}(u, v)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care înlocuind pe $F_{XY}(u, v)$ cu $C_{XY}(F_X(u), F_Y(v))$ conform teoremei 2.1.1 rezultă că propoziția este demonstrată.

Faptul că integrala (1) depinde de funcțiile de repartiție F_X, F_Y, de copula C și de funcția g și nu depinde direct de variabilele aleatoare X și Y sugerează introducerea unei notații speciale pentru funcția de repartiție a variabilei aleatoare $g(X, Y)$ și anume se notează prin $[\Phi(g, C)(F_X, F_Y)](x)$ pentru orice $x \in \overline{\mathbf{R}}$.

Definiția 2.2.1. Pentru orice funcție reală g de două variabile și măsurabilă Borel, orice copulă C și orice pereche de funcții $F, G \in \mathcal{R}$ avem că

$$[\Phi(g, C)(F, G)](x) = \iint_{g(u, v) < x} dC(F(u), G(v)), \quad x \in \overline{\mathbf{R}}$$

este o funcție reală.

Se deduce ușor din definiția copulei C și mai ales din condiția d) a respectivei definiții că vom avea $0 \leqslant [\Phi(g, C)(F, G)](x) \leqslant 1$ și că $\Phi(g, C)(F, G)$ este nedescrescătoare pe $\overline{\mathbf{R}}$. Deci la nevoie punînd condiția de normalizare de a fi continuă la stînga, se obține că $\Phi(g, C)(F, G) \in \mathcal{R}$ adică pentru g și C fixate, $\Phi(g, C)(F, G)$ definește o operație binară pe $\mathcal{R}$. Mai mult dacă g este nenegativă pe primul cadran din R^2 rezultă (din condiția că $C(a, 0) = C(0, b) = 0$) că restricția lui $\Phi(g, C)(F, G)$ la $\mathcal{R}^+$ este o operație binară pe $\mathcal{R}^+$.

Deducem astfel că orice operație binară pe mulțimea variabilelor aleatoare $\mathcal{E}$ generează o familie de operații binare pe $\mathcal{R}$ (cîte una pentru fiecare alegere a copulei C) și anume prin

$$F_{g(X,Y)} = \Phi(g, C_{XY})(F_X, F_Y)$$

De un interes deosebit este operația indusă de $g(u, v) = u + v$ adică de operația de adunare pe $\mathcal{E}$ în care caz convenim să notăm prin $\sigma_c = \Phi(g, C)$ obținînd astfel σ_C-*operațiile binare pe* $\mathcal{R}$, adică avem

$$F_{X+Y} = \sigma_{C_{XY}}(F_X, F_Y)$$

unde existența lui C_{XY} este asigurată de teorema 2.1.1.

Ținînd seama că aceste operații sînt obiectul acestui subparagraf să dăm o demonstrație [81] a afirmației că dacă C este o copulă, $F, G \in \mathcal{R}$ atunci $\sigma_C(F, G)$ definită pe $[-\infty, \infty]$ prin integrala Lebesgue-Stieltjes

$$\sigma_C(F, G)(x) = \iint_{-\infty \leqslant u+v \leqslant x} dC(F(u), G(v))$$

aparține la $\mathcal{R}$ sau dacă $F, G \in \mathcal{R}_v$ (respectiv la $\mathcal{R}^+$) și $\sigma_C(F, G) \in \mathcal{R}_v$ (respectiv $\sigma_C(F, G) \in \mathcal{R}^+$).

Fie D un domeniu dreptunghiular al planului extins definit de

$$D = \{(u, v) : u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \ v_1 \leqslant v \leqslant v_2\}$$

atunci din definiția integralei Lebesgue-Stieltjes avem

$$(2) \qquad \iint_D dC(F(u), G(v)) =$$

$$= C(F(u_1), G(v_1)) - C(F(u_2), G(v_2)) - C(F(u_1), G(v_2)) + C(F(u_2), F(v_2))$$

Scanned with OKEN Scanner

Proprietatea de monotonie nedescrescătoare a lui F și G împreună cu observația din Lema 2.1.3 implică inegalitățile

$$(3) \qquad 0 \leqslant \iint_D \mathrm{d}C(F(u),\ G(v)) \leqslant 2\mathrm{Min}\ \{F(u_2) - F(u_1),\ G(v_2) - G(v_1)\}$$

Dacă $-\infty \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \infty$ obținem

$$\sigma_C(F, G)(x_2) - \sigma_C(F, G)(x_1) = \iint_{x_1 < u+v \leqslant x_2} \mathrm{d}C(F(u),\ G(v))$$

care fiind o limită a sumelor de creșteri de tipul (2) este nenegativă și deci $\sigma_C(F, G)$ este nedescrescătoare.

Folosind relația (2) și proprietățile b) și c) din definiția copulelor (definiția 2.1.6) se obține că $\sigma_C(F, G)(-\infty) = 0$ și $\sigma_C(F, G)(\infty) = 1$.

Pentru a justifica continuitatea la stînga pe $(-\infty, \infty)$ să considerăm un punct $x_0 \in (-\infty, \infty)$, un $y \in (-\infty, x_0)$ și să definim

$$S(y, x_0) = \{(u, v):\ y < u + v \leqslant x_0\}$$

Să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un y astfel încît

$$(4) \qquad \sigma_C(F, G)(x) - \sigma_C(F, G)(y) = \iint_{S(y,\ x_0)} \mathrm{d}C(F(u), G(v))$$

Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ să notăm prin $D_n = \{(u, v):\ -\infty \leqslant u \leqslant n,\ -\infty \leqslant v \leqslant n\}$ și să observăm că din relația (2) rezultă că avem

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \mathrm{d}C(F(u), G(v)) = \lim_{n\to\infty} C(F(n), G(n)) = C(\sup F, \sup G)$$

Cum $S(y, x_0)$ este conținut în $\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ rezultă că există un n_0 astfel încît pentru orice $y < x_0$, suficient de apropiat de x_0, să avem

$$(5) \qquad \iint_{S(y,\ x_0) - D_{n_0}} \mathrm{d}C(F(u),\ G(v)) < \varepsilon/2$$

De asemenea partiționînd pe $S(y, x_0) \cap D_{n_0}$ într-un număr finit, convenabil ales, de benzi verticale și folosindu-ne de continuitatea la stînga a lui F și de relația (3) deducem că

$$(6) \qquad \iint_{S(y,\ x_0) \cap D_{n_0}} \mathrm{d}C(F(u),\ G(v)) < \varepsilon/2$$

ceea ce împreună cu (5) ne dă relația dorită (4).

Evident că pentru continuitatea la stînga a lui $\sigma_C(F, G)$ s-a utilizat numai continuitatea la stînga a uneia dintre funcțiile F sau G. În mod asemănător se puteau considera benzi orizontale și se utiliza numai continuitatea la stînga a lui G.

Celelalte afirmații privind apartenența la $\mathscr{R}_v$ sau $\mathscr{R}^+$ rezultă din proprietățile integralei și din condițiile b) și c) ale definiției copulei. Prin urmare pentru orice copulă C fixată, aplicația σ_C este o operație binară pe $\mathscr{R}$ în care de asemenea $\mathscr{R}_v$, $\mathscr{R}^+$ și $\mathscr{R}_v^+$ sînt submulțimi închise relativ la această operație. Se verifică ușor că funcția $H_0(x)$ este element unitate față de operația σ_C pe $\mathscr{R}^+$ (ceea ce va fi util în teoria spațiilor metrice probabiliste).

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd X și Y sînt independente se știe că funcția de repartiție 2-dimensională corespunzătoare este dată de

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) = \text{Prod}\ (F_X(x),\ F_Y(y))$$

în care caz deducem că

$$F_{X+Y} = \iint_{u+v<x} \mathrm{d}C(F_X(u),\ F_Y(v)) = \iint_{u+v<x} \mathrm{d}F_X(u) \cdot \mathrm{d}F_Y(v) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-v} \mathrm{d}F_X(u) \right) \mathrm{d}F_Y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-v)\, \mathrm{d}F_Y(v) = (F_X * F_Y)(x).$$

Prin urmare convoluția din $\mathcal{R}$ se obține ca un caz particular de σ_C-operație întrucît avem

$$F_{X+Y} = F_X * F_Y = \sigma_{\text{Prod}}(F_X,\ F_Y)$$

de unde rezultă și proprietatea de asociativitate pe $\mathcal{R}$ a operației σ_{Prod}. Această σ_C-operație a fost suficient de mult studiată în literatura matematică însă pentru $C \neq \text{Prod}$ un studiu mai amănunțit îi aparține lui M. J. Frank în teza sa de doctorat [79] ale cărei rezultate sînt expuse mai jos.

Este important de observat că atît proprietățile b) și c) cît și proprietatea d) ale copulei C (conform definiției 2.1.6) sînt necesare și suficiente pentru asigurarea condițiilor ca σ_C să fie o operație binară avînd ca element unitate pe $H_0(x)$ în $\mathcal{R}_v^+$. În adevăr se pot găsi exemple de funcții $F \in \mathcal{R}_v$ pentru care să avem $\sigma_C(F, H_0) \neq F$ dacă C nu verifică condițiile b) sau c). De asemenea dacă C verifică condițiile b) și c) dar avem că $C(a_1, b_1) - C(a_2, b_1) - C(a_1, b_2) + C(a_2, b_2) < 0$ pentru anumite valori ale lui a_1, a_2, b_1, b_2 cu proprietățile $0 \leqslant a_1 < a_2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant b_1 < b_2 \leqslant 1$, putem defini

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ a_1, & 0 < x \leqslant 2 \\ a_2, & 2 < x \leqslant 6, \\ 1, & 6 < x, \end{cases}, \qquad G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ b_1, & 0 < x \leqslant 2, \\ b_2, & 2 < x \leqslant 6, \\ 1, & 6 < x, \end{cases}$$

și $C = \text{Prod}$. Atunci vom avea

$$\sigma_C(F, G)(3) = \int_{\mathbf{R}} F(3-t)\, \mathrm{d}G(t) = \int_{t<-3} 1\, \mathrm{d}G(t) + \int_{[-3,\,1) = [-3,\,0) \cup [0,\,1)} a_2\, \mathrm{d}G(t) +$$

$$+ \int_{[1,\,3) = [1,\,2) \cup [2,\,3)} a_1\, \mathrm{d}G(t) + \int_{(3,\,\infty)} 0\, \mathrm{d}G(t) = a_2b_1 + a_1b_1 - a_1b_1 + a_1b_2 - a_1b_1 =$$

$$= a_2b_1 + a_1b_2 - a_1b_1 = C(a_2,\ b_1) + C(a_1,\ b_1) - C(a_1, b_1)$$

și analog

$$\sigma_C(F, G)(5) = \int_{\mathbf{R}} F(5-t)\, \mathrm{d}G(t) = \int_{(-\infty,\,1)} 1\, \mathrm{d}G(t) + \int_{[-1,\,3) = [-1,\,0) \cup [0,\,2) \cup [2,\,3)} a_2\, \mathrm{d}G(t) +$$

$$+ \int_{[3,\,5)} a_1\, \mathrm{d}G(t) + \int_{[5,\,\infty)} 0\, \mathrm{d}G(t) = a_2b_2 + a_1(b_2 - b_2) = a_2b_2 = C(a_2, b_2)$$

adică $\sigma_C(F, G)(5) < \sigma_C(F, G)(3)$ ceea ce contrazice cerința ca $\sigma_C(F, G)$ să fie nedescrescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

Am văzut mai sus că $\sigma_{\mathbf{Prod}}$ este asociativă pe $\mathcal{R}$ de aceea ne punem problema găsirii și altor σ_C-operații asociative. Vom avea

Propoziția 2.2.2. *Operația* $\sigma_{\mathbf{Min}}$ *este asociativă pe* $\mathcal{R}$.

Demonstrație. Vom arăta că $\sigma_{\mathbf{Min}}$ coincide cu $\tau_{\mathbf{Min}}$ pe $\mathcal{R}$, $\tau_{\mathbf{Min}}$ fiind dată prin

$$\tau_{\mathbf{Min}}(F, G)(x) = \sup_{u+v=x} \mathrm{Min}\,(F(u), G(v))$$

și întrucît Min este o t-normă continuă rezultă conform teoremei 2.1.20 că $\tau_{\mathbf{Min}}$ este o funcție triunghiulară deci asociativă. Rezultă astfel asociativitatea lui $\sigma_{\mathbf{Min}}$ precum și alte proprietăți importante ale ei cu consecințe importante asupra cărora vom reveni în § 2.2.

Pentru justificarea egalității $\sigma_{\mathbf{Min}} = \tau_{\mathbf{Min}}$ să considerăm $F, G \in \mathcal{R}$ și f o funcție de două variabile dată prin

$$f(u, v) = \mathrm{Min}\ (F(u), G(v))$$

Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ să notăm prin

$$D_x = \{(u, v): -\infty \leqslant u + v \leqslant x\}$$

și să demonstrăm că

$$\iint_{D_x} \mathrm{d}f = \sup_{u+v=x} f(u, v) \tag{7}$$

În acest scop vom face raționamentele cu ajutorul unor integrale duble pe domenii dreptunghiulare care permit un calcul mai simplu după cum deducem din formula (2).

Pentru orice pereche (u', v') cu $u' + v' = x$, se deduce ușor că $D' = \{(u, v): -\infty \leqslant u \leqslant u', -\infty \leqslant v \leqslant v'\}$ se conține în D_x și avem

$$\iint_{D_x} \mathrm{d}f \geqslant \iint_{D'} \mathrm{d}f = f(u', v')$$

de unde rezultă că

$$\iint_{D_x} \mathrm{d}f \geqslant \sup_{u+v=x} f(u, v)$$

Pentru a demonstra inegalitatea inversă acesteia considerăm mai întîi cazul degenerat cînd $\sup F \leqslant \inf G$. Atunci $f(u, v) = F(u)$ pentru orice pereche (u, v) iar integrala pe domeniul $\{(u, v): -\infty \leqslant u + v \leqslant x,\ u \leqslant t\}$ este egal cu $F(t)$ și evident avem

$$\iint_{D_x} \mathrm{d}f \leqslant \sup_{u+v=x} f(u, v) \tag{7'}$$

fiecare parte fiind egală cu $\sup F$. În mod analog se obține inegalitatea amintită cînd F și G își schimbă rolurile.

Dacă $\inf G < \sup F$ și $\inf F < \sup G$ atunci numerele $u_1 = \sup \{u: F(u) < G(x-u)\}$, $u_2 = \inf \{u: F(u) > G(x-u)\}$ sînt finite și dacă $F(u) < G(x-u)$ atunci pentru orice $u' < u$, $F(u') \leqslant F(u) < G(x-u) \leqslant G(x-u')$ adică avem

$$F(u) < G(x-u) \text{ pentru } u < u_1 \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog obținem

$$F(u) > G(x-u) \text{ pentru } u > u_2 \tag{8'}$$

de unde rezultă că $u_1 \leqslant u_2$.

Să considerăm $v_1 = x - u_1$, $v_2 = x - u_2$ și $D_1 = \{(u, v): -\infty \leqslant u < u_1, v_1 < v \leqslant \infty\}$, $D_2 = \{(u, v): u_2 < u \leqslant \infty, -\infty \leqslant v < v_2\}$. Pentru orice punct $(u, v) \in D_1$ există o pereche (u', v') astfel încît să avem $u \leqslant u' < u_1$, $v_1 < v' < v$ și $u' + v' = x$. Atunci din (8) rezultă că $F(u) \leqslant F(u') < G(v') \leqslant G(v)$ și analog din (8') deducem că pentru orice punct $(u, v) \in D_2$ avem $G(v) < F(u)$. Deci obținem

$$f(u, v) = \begin{cases} F(u) \text{ pentru } (u, v) \in D_1 \\ G(v) \text{ pentru } (u, v) \in D_2 \end{cases} \tag{9}$$

Din relația (9) și continuitatea la stînga a lui F deducem că $f(u_1, v) = f(u_1-, v) = F(u_1-) = F(u_1)$ dacă $v > v_1$ și analog $f(u, v_2) = G(v_2)$ dacă $u > u_2$. Prin urmare putem scrie că

$$\iint_{\bar{D}_1} df = F(u_1) - f(u_1, v_1), \quad \iint_{\bar{D}_2} df = G(v_2) - f(u_2, v_2) \tag{10}$$

unde $\bar{D}_i$ reprezintă închiderea lui D_i, $i = 1, 2$.

Să considerăm $D_3 = \{(u, v): -\infty \leqslant u \leqslant u_2, -\infty \leqslant v \leqslant v_1\}$ și să observăm că $D_x \subset \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \cup D_3$ și distingem două cazuri:

a) dacă $u_1 = u_2$, atunci din (9) deducem că $f(u, x-u)$, ca funcție de u, este nedescrescătoare pe $[-\infty, u_1)$ și necrescătoare pe $(u_2, \infty]$ adică avem

$$\sup_{u+v=x} f(u, v) = \max (F(u_1), G(v_1)) \tag{11}$$

și cum $\iint_{D_3} df = f(u_1, v_1)$ din (10) rezultă că

$$\iint_{D_x} df \leqslant \iint_{\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \cup D_3} df = F(u_1) + G(v_1) - f(u_1, v_1) = \max (F(u_1), G(v_1))$$

care împreună cu (11) ne dă relația dorită (7').

b) Dacă $u_1 < u_2$ atunci din faptul că $F(u) = G(x-u)$, pentru orice $u \in (u_1, u_2)$, rezultă că există un număr t astfel că $f(u, v) = F(u) = G(v) = t$ dacă $u_1 < u \leqslant u_2$, $v_2 < v \leqslant v_1$, adică avem că

$$\sup_{u+v=x} f(u, v) = t \tag{12}$$

Cum $f(u_1, v_1) = F(u_1)$ și $f(u_2, v_2) = G(v_2)$ din (10) rezultă că $\iint_{\bar{D}_1} df = \iint_{\bar{D}_2} df = 0$ și

$$\iint_{D_x} df \leqslant \iint_{D_3} df = f(u_2, v_2) = t \tag{12'}$$

adică (12) și (12') implică (7') și propoziția este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Dificultatea fundamentală în raționamentele cu σ_C-operații constă în evaluarea integralelor pe care le implică. Cu toate acestea, folosind funcții simple convenabil alese, se pot da condiții necesare importante cu privire la existența soluțiilor ecuației asociativității.

De altfel am desprins din § 1 că o t-normă este o copulă dacă și numai dacă satisface și condiția d) din definiția 2.1.6 iar o copulă este o t-normă dacă și numai dacă este asociativă. Cum există copule C care nu sînt asociative este clar că nu orice σ_C este o funcție triunghiulară și după cum vom vedea această clasă este destul de restrînsă. Condiția de asociativitate a lui C nu este suficientă pentru asociativitatea lui σ_C însă este necesară. Mai exact avem

Propoziția 2.2.3. *Fie o operație σ_C asociativă pe $\mathcal{R}_v$. Atunci C trebuie să fie o copulă asociativă și totodată o soluție a ecuației funcționale*

$$(13) \qquad C(a+b-C(a,b),c) = C(a,c)+C(b,c)-C(C(a,b),c)$$

pentru orice a, b, $c \in [0,1]$.

Demonstrație. Fiind date a, b, $c \in [0,1]$ să definim funcțiile F_1, F_2, F_3 din $\mathcal{R}_v^+$ prin

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ a, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x, \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ b, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x, \end{cases} \quad F_3(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ c, & 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x, \end{cases}$$

Trecînd eventual la variabilele aleatoare corespunzătoare și făcînd operațiile sugerate de definiția lui σ_C, cu ajutorul funcției de repartiție a variabilei aleatoare sumă sau cea bidimensională și formula de calcul (2) se obține că

$$\sigma_C(F_1,F_2)(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ C(a,b), & 0 < x \leqslant 1 \\ a+b-C(a,b), & 1 < x \leqslant 2 \\ 1, & 2 < x \end{cases}$$

Repetînd raționamentele vom obține

$$\sigma_C(\sigma_C(F_1,F_2),F_3)(x) = \begin{cases} C(C(a,b),c), & 0 < x \leqslant 1, \\ C(a+b-C(a,b),c), & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

și în mod asemănător

$$\sigma_C(F_1,\sigma_C(F_2,F_3))(x) = \begin{cases} C(a,C(b,c)), & 0 < x \leqslant 1, \\ C(a,c)+C(b,c)-C(a,C(b,c)), & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Din ipoteză rezultă egalitatea membrilor din partea dreaptă pentru orice x și propoziția este demonstrată.

Corolar. *Operația σ_{C_m} nu este asociativă pe $\mathcal{R}_v^+$.*

Demonstrație. Arătăm că C_m nu este o soluție a ecuației funcționale din propoziția de mai sus. În adevăr pentru $a = b = c = \frac{1}{2}$ avem $C_m(a+b-C_m(a,b),c) = \frac{1}{2}$ dar $C_m(a,c)+C_m(b,c)+C_m(C_m(a,b),c) = 0$ și corolarul este demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

Soluțiile ecuației funcționale (13) pot fi legate de o clasă de funcții obținută cu ajutorul copulelor și anume pentru orice copulă C se asociază funcția $\widehat{C}$ definită pe $[0, 1] \times [0, 1]$ prin

$$\widehat{C}(a, b) = a + b - C(a, b) \tag{13'}$$

Se verifică ușor că $\widehat{C}$ este nedescrescătoare și continuă relativ la fiecare variabilă. În adevăr, pentru orice $a < a'$, $b < 1$, $a, a', b \in [0, 1]$ avem $0 \leqslant C(a', 1) - C(a, 1) - C(a', b) + C(a, b) = \widehat{C}(a', b) - \widehat{C}(a, b)$

De asemenea înlocuind în condiția d) din definiția 2.1.6 pe $c = d = 1$ obținem că $C(a, b) - b - a + 1 \geqslant 0$ deci $\widehat{C}(a, b) \leqslant 1$ și $\widehat{C}(a, b) \geqslant 0$ căci $C(a, b) \leqslant \text{Min}\ (a, b)$, adică $0 \leqslant \widehat{C}(a, b) \leqslant 1$ oricare ar fi $a, b \in [0, 1]$.

Aceste funcții $\widehat{C}$ permit formularea unei noi condiții necesare pentru asociativitatea lui σ_C și anume:

Propoziția 2.2.4. *Condiția necesară pentru asociativitatea lui* σ_C *pe* $\mathcal{R}_v^+$ *este asociativitatea ambelor funcții* C *și* $\widehat{C}$.

Demonstrație. Va rezulta din următoarele două leme.

Lema 2.2.1. *Fie* C *o copulă, atunci* $\widehat{C}$ *este asociativă dacă și numai dacă* C *este o soluție a ecuației funcționale*

$$C(a + b - C(a, b), c) + C(a, b) = C(a, b + c - C(b, c)) + C(b, c) \tag{13''}$$

pentru orice $a, b, c \in [0, 1]$.

Justificarea ei rezultă direct din înlocuirea lui $\widehat{C}$ în ecuația asociativității.

Lema 2.2.2. *Orice soluție asociativă a ecuației* (13) *este o soluție pentru ecuația* (13'').

În adevăr, dacă schimbăm rolul lui a cu al lui c în (13) și scădem rezultatul obținut din ecuația (13) apoi folosim asociativitatea și simetria lui C (corolarul teoremei 2.1.5) rezultă relația cerută.

Să observăm că reciproca lemei 2.2.2 nu are loc căci de exemplu $\widehat{C}_m(a, b) = \text{Min}\ (a + b, 1)$ este asociativă însă C_m nu este o soluție a ecuației (13).

Să demonstrăm acum că singura copulă C arhimediană a cărei σ_C-operație este asociativă este $C = \text{Prod}$ și că copulele nestricte nu pot genera operații asociative.

Prepoziția 2.2.5. *Dacă* C *este o soluție arhimediană (deci și asociativă) a ecuației* (13'') *atunci* C *nu poate fi decît o copulă strictă sau* $C = C_m$.

Demonstrație. Dacă presupunem că C nu este strictă atunci generatorul său (teorema 2.1.4) va fi o funcție f pentru care $f(0) = s < \infty$.

Fie $x_0 = f^{(-1)}(s/2)$ unde $f^{(-1)}$ este pseudoinversa lui f. Cum f este convexă rezultă că $0 < x_0 < 1/2$ iar din reprezentarea lui C sub forma $C(a, b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b))$ deducem că $x_0 = \sup\{x: C(x, x) = 0\}$ adică avem

$$C(x_0, z) = 0 \text{ pentru } z \leqslant x_0 \tag{14}$$

$$C(x_0, z) \neq 0 \text{ pentru } z > x_0 \tag{14'}$$

Să observăm că avem $2f(x_0) \leqslant f(x_0/2) + f(3x_0/2)$ și că $f^{(-1)}$ fiind necrescătoare putem scrie că

$$C(x_0/2, 3x_0/2) = f^{(-1)}(f(x_0/2) + f(3x_0/2)) \leqslant f^{(-1)}(2f(x_0)) = C(x_0, x_0) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

adică avem

$$C(x_0/2,\ 3x_0/2) = 0 \tag{15}$$

Dacă luăm $a = x_0$, $b = x_0/2$, $c = 3x_0/2$ și ținem seama de (14) și (15) ecuația (13'') se reduce la

$$C(3x_0/2,\ 3x_0/2) = C(x_0,\ 2x_0) = f^{(-1)}(f(x_0) + f(2x_0))$$

Dar din (14') avem că $C(x_0, 2x_0) \neq 0$ și aplicînd f ambilor membrii ai ultimei egalități obținem

$$2f(3x_0/2) = f(x_0) + f(2x_0)$$

iar din convexitatea lui f rezultă liniaritarea lui f pe $(x_0, 2x_0]$ și fie $-k$ coeficientul unghiular al lui f pe $[x_0, 2x_0]$.

Dacă alegem un y arbitrar din $(0, x_0)$ avem că $x_0 < x_0 + y < 1$ și din (14) și (14') deducem că

$$C(x_0, y) = 0 \tag{14''}$$

$$C(x_0, x_0 + y) \neq 0 \tag{14'''}$$

Dacă luăm $a = b = x_0$, $c = y$ folosindu-ne de (14) și (14'') deducem că ecuația (13'') se reduce la $C(2x_0, y) = C(x_0, x_0 + y)$ în care ținînd seama de (14''') și aplicînd pe f în ambii membri obținem

$$f(2x_0) + f(y) = f(x_0) + f(x_0 + y)$$

de unde putem scrie că

$$-k = (f(2x_0) - f(x_0))/x_0 = (f(x_0 + y) - f(y))/x_0$$

Prin urmare, întrucît punctul $(x_0 + y, f(x_0 + y))$ aparține segmentului de dreaptă ce unește punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(2x_0, f(2x_0))$, f trebuie să fie liniară pe $(y, y_0 + y]$, de unde deducem imediat că f trebuie să fie liniară pe $(0, 2x_0]$ iar din continuitate rezultă liniaritatea pe $[0, 2x_0]$. Atunci al egerea $x_0 = f^{(-1)}(s/2)$ implică $f(2x_0) = 0$ adică $2x_0 = 1$. Cum f trebuie să fie liniară în $[0, 1]$ rezultă că $f(x) = k(1 - x)$ adică $C = C_m$.

Corolar. *Orice soluție arhimediană (deci si asociativă) a ecuației* (13) *este strictă, adică nu există copule C arhimediene nestricte pentru care* σ_C *să fie asociativă pe* $\mathcal{R}_v^+$.

Justificasa rezultă din lema 2.2.2 și observația că C_m nu este soluție a lui (13). Din propoziția 2.2.5 și corolarul propoziției 2.2.3 rezultă mai clar că numai copulele arhimediene stricte pot genera σ_C-operații asociative.

M. J. Frank [81] face conjectura că $C = \text{Prod}$ este singura soluție strictă asociativă a ecuației (13'') reușind să găsească pentru fiecare copulă strictă concretă folosită de obicei în [235] cîte un triplet (a, b, c) pentru care (13'') nu este verificată. Deși această problemă este încă deschisă se poate stabili că clasa copulelor stricte pentru care σ_C este asociativă se reduce la un singur element și anume avem.

Propoziția 2.2.6 [81] *Singura copulă strictă C pentru care* σ_C *este o operație asociativă pe* $\mathcal{R}_v^+$ *este* $C = \text{Prod}$.

Din propoziția 2.2.6 și corolarul propoziției 2.2.5 deducem o afirmație directă asupra copulelor arhimediene și anume

Propoziția 2.2.7. *Singura copulă arhimediană C pentru care* σ_C *este asociativă pe* $\mathcal{R}_v^+$ *este* $C = \text{Prod}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să ne ocupăm acum de cazul copulelor nearhimediene și anume mai întîi de acelea obținute ca sume ordinale de alte copule a căror importanță este pusă în evidență de teorema 2.1.5. Vom avea

Propoziția 2.2.8. *Fie C dată de suma ordinală a familiei $\{S_n, C_n\}$ ($\{S_n\}$ fiind o familie numărabilă de intervale care nu se suprapun două cîte două, C_n copula asociativă lui S_n prin procedeul cunoscut). Pentru ca σ_C să fie asociativă pe $\mathcal{R}_v^+$ este necesar ca σ_{C_n} să fie asociativă pe $\mathcal{R}_v^+$ pentru fiecare termen S_n din $\{S_C\}$.*

Demonstrație. Dacă presupunem că σ_{C_n} nu este asociativă pe $\mathcal{R}_v^+$ pentru un oarecare termen C_n al sumei ordinale și căreia îi corespunde intervalul $S_n = [\lambda, \lambda']$ din $\{S_n\}$, atunci există F_1, F_2, F_3 din $\mathcal{R}_v^+$ și un $x_0 > 0$ astfel încît să avem

$$(16) \qquad \sigma_{C_n}(\sigma_{C_n}(F_1, F_2), F_3)(x_0) \neq \sigma_{C_n}(F_1, \sigma_{C_n}(F_2, F_3))(x_0)$$

Fie G_i, $i = 1, 2, 3$ elemente din $\mathcal{R}_v^+$ date prin

$$G_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \lambda + (\lambda' - \lambda)F_i(x), & 0 < x \leqslant x_0 \\ 1, & x_0 < x \end{cases}$$

atunci folosind definiția lui C_n și a lui C se deduce că pentru $0 < u \leqslant x_0$, $0 < v \leqslant x_0$ vom avea

$$C(G_1(u), G_2(v)) = C(\lambda + (\lambda' - \lambda)F_1(u), \lambda + (\lambda' - \lambda)F_2(v)) =$$
$$= \lambda + (\lambda' - \lambda)C_n(F_1(u), F_2(v))$$

Cum $\sigma_C(G_1, G_2)(0 +) = \lambda$ rezultă că pentru $0 < x \leqslant x_0$ avem

$$\sigma_C(G_1, G_2)(x) = \lambda + (\lambda' - \lambda)\sigma_{C_n}(F_1, F_2)(x).$$

În mod asemănător deducem că

$$\sigma_C(\sigma_C(G_1, G_2), G_3)(x_0) = \lambda + (\lambda' - \lambda)\sigma_{C_n}(\sigma_{C_n}(F_1, F_2), F_3)(x_0)$$
$$\sigma_C(G_1, \sigma_C(G_2, G_3)(x_0) = \lambda + (\lambda' - \lambda)\sigma_{C_n}(F_1, \sigma_{C_n}(F_2, F_3))(x_0)$$

Din condiția (16) avem că membrii din stînga ai acestei egalități nu pot să coincidă și deci σ_C nu poate fi asociativă pe $\mathcal{R}_v^+$ și propoziția este demonstrată.

Propoziția 2.2.9. *Fie C o sumă ordinală ai cărei termeni sînt respectiv copulele* Min *sau* Prod, *atunci σ_C este asociativă pe $\mathcal{R}$.*

O demonstrație interesantă și laborioasă a fost dată de M. Frank [81] însă nu ne vom opri la ea din lipsă de spațiu.

Să observăm că din propoziția 2.2.3, teorema 2.1.5 și propoziția 2.2.7 deducem că dacă σ_C este asociativă pe $\mathcal{R}(\mathcal{R}_v, \mathcal{R}^+, \mathcal{R}_v^+)$ atunci avem

1) $C = \text{Min}$
2) $C = \text{Prod}$

sau

3) C este dată de o sumă ordinală de copule fiecare dintre termenii acesteia fiind Min sau Prod adică condițiile 1) — 3) sînt necesare pentru proprietatea de asociativitate a σ_C-operației corespunzătoare. Cum propoziția 2.2.9 oferă o condiție suficientă obținem

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.2.1. *O* σ_C*-operație este asociativă pe* $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{R}_v$ *sau* $\mathcal{R}_v^+$ *dacă și numai dacă avem îndeplinite condițiile* 1) — 3) *de mai sus.*

Prin urmare copulele sînt o sursă relativ săracă de semigrupuri pe $\mathcal{R}$ (semigrupuri noi fiind date numai de condiția 3)) rezultînd că σ_C este o funcție triunghiulară dacă și numai dacă ea este asociativă. Ele constituie un obiect de investigație prin importanța legăturii dintre operațiile pe $\mathcal{R}$ și pe $\mathcal{L}$ cît și prin legătura lor cu convoluțiile generalizate [285], [286] și semigrupurile delphice introduse în [135], [136], [16].

2.2. OPERAȚII PE SPAȚIUL FUNCȚIILOR DE REPARTIȚIE CARE NU DERIVĂ DIN OPERAȚII PE SPAȚIUL VARIABILELOR ALEATOARE

Se știe că operația de convoluție pe $\mathcal{R}$ corespunde operației de adunare pe $\mathcal{L}$ în sensul că dacă F și G sînt funcții de repartiție există două variabile aleatoare independente X și Y definite pe același cîmp probabilizat $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ astfel încît F și respectiv G sînt funcțiile de repartiție corespunzătoare lui X și Y iar convoluția lor $F * G$ este funcția de repartiție asociată lui $X + Y$. Este deci natural să ne punem problema ce operații pe $\mathcal{L}$ corespund la operațiile τ_C, C fiind o copulă arbitrară iar τ_C definindu-se analog cu τ_T. Vom arăta că în general pot să nu existe operații pe $\mathcal{L}$ corespunzătoare la orice τ_T. Acest rezultat clarifică deosebirea ce există între abordarea unor probleme ale teoriei probabilităților cu ajutorul funcțiilor de repartiție cum este de exemplu teoria spațiilor metrice probabiliste, și abordarea cu ajutorul variabilelor aleatoare. Deci preferința spre primul tip de abordare nu este o problemă numai de formă ci ea arată că există probleme în teoria probabilităților care nu pot fi cuprinse în modelul standard și tradițional oferit de teoria măsurii. Există combinații rezonabile de funcții de repartiție care nu pot fi exprimate prin nici o combinație funcțională de variabile aleatoare. Deci nu întîmplător funcțiile de repartiție și nu variabilele aleatoare sînt obiectele fundamentale ale unor prelucrări de date obținute din experiențe științifice care au tangență cu fenomene aleatoare. Deci modelul teoriei măsurii care a jucat un rol fundamental în dezvoltarea teoriei probabilităților ca obiect al matematicii are limitele sale de aplicabilitate.

Aceste probleme au fost elucidate de B. Schweizer și A. Sklar [249], [265], [247], [250].

Pentru a fixa mai bine terminologia să dăm

Definiția 2.2.2. [249] Fie β o operație binară pe $\mathcal{R}$. Se spune că operația β *derivă dintr-o operație de pe spațiul variabilelor aleatoare* $\mathcal{L}$ dacă există o funcție reală g, de două variabile, măsurabilă Borel și astfel încît oricare ar fi F și $G \in \mathcal{R}$ există variabilele aleatoare X, Y definite pe același spațiu probabilizat $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ astfel ca funcțiile de repartiție corespunzătoare lor sînt F și G iar cea corespunzătoare lui $g(X, Y)$ este $\beta(F, G)$.

În scopul extinderii posibilităților de a defini operații binare pe $\mathcal{R}$ într-un mod asemănător τ_T și π_T-operațiilor, să introducem o clasă mai largă decît cea a t-normelor sau a copulelor și anume

Definiția 2.2.3. Fie $\mathcal{T}_1$ familia funcțiilor T care posedă proprietățile:

a) $T: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, deci o operație binară pe $[0, 1]$,

b) T este nedescrescătoare în raport cu fiecare variabilă,

c) $T(a, 0) = T(0, a) = 0$, $T(a, 1) = T(1, a) = a$ oricare ar fi $a \in [0, 1]$.

Vom nota cu $\mathcal{T}_2$ familia funcțiilor T care posedă proprietățile a), b) și

c') $T(0, 0) = 0$, $T(1, 1) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Evident că $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, orice t-normă T și orice copulă C aparține la $\mathcal{T}_1$ iar incluziunea $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ este strictă căci orice funcție $\widehat{C}$ definită pe $[0, 1]\times[0, 1]$ prin

$$\widehat{C}(a, b) = a + b - C(a, b) \tag{1}$$

unde C este o copulă arbitrară, este din $\mathcal{T}_2$ dar nu este din $\mathcal{T}_1$.

Orice element $T \in \mathcal{T}_2$ poate genera o operație binară pe $\mathcal{R}$ sau $\mathcal{R}^+$ considerînd operațiile notate cu τ_T și π_T, definite în același mod ca în § 1.4 și 1.5, adică

$$(1') \quad \pi_T(F, G)(x) = T(F(x), G(x)), \quad F, G \in \mathcal{R} \text{ sau } \mathcal{R}^+ \text{ și } T \in \mathcal{T}_2$$

$$(1'') \quad \tau_T(F, G)(x) = \sup_{u+v=x} T(F(u), G(v)), \quad F, G \in \mathcal{R} \text{ sau } \mathcal{R}^+ \text{ și } T \in \mathcal{T}_2$$

deci putem vorbi și de π_C, $\pi_{\hat{C}}$, $\tau_{\hat{C}}$, etc.

Cu privire la existența funcției Φ și g cu ajutorul căreia se definește o operație binară pe $\mathcal{R}$ sau $\mathcal{R}^+$ conform definiției 2.2.1 avem

Propoziția 2.2.10. *Dacă C este o copulă oarecare și C funcția definită prin* (1) *atunci*

$$\pi_C = \Phi(\mathrm{Max}, C) \text{ și } \pi_{\hat{C}} = \Phi(\mathrm{Min}, C)$$

adică g este respectiv Max *sau* Min.

Demonstrație. Fie $F, G \in \mathcal{R}$, atunci pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem

$$\pi_C(F, G)(x) = CF(x), G(x)) = \iint_{u<x,\ v<x} dC(F(u), G(v)) =$$

$$= \iint_{\{(u,v):\, u<v,\, v<x\} \cup \{(u,v):\, u>v,\, u<x\} = \mathrm{Max}\,(u,v)<x} dC(F(u), G(v) = \Phi(\mathrm{Max}, C)(F, G)(x)$$

Analog deducem că

$$\pi_{\hat{C}}(F, G)(x) = \widehat{C}(F(x), G(x)) = F(x) + G(x) - C(F(x), G(x)) =$$

$$= \iint_{u<x} dC(F(u), G(v)) + \iint_{v<x} dC(F(u), G(v)) - \iint_{u<x, v<x} dC(F(u), G(v)) =$$

$$= \iint_{\mathrm{Min}\,(u,v)<x} dC(F(u), G(v)) = \Phi(\mathrm{Min}, C)(F, G)(x)$$

Prin urmare fiecare dintre operațiile binare π_C și $\pi_{\hat{C}}$ pe $\mathcal{R}$ derivă de la cîte o operație pe spațiul variabilelor aleatoare $\mathcal{L}$. Am văzut în propoziția 2.2.2 că avem și

$$\tau_{\mathrm{Min}} = \sigma_{\mathrm{Min}} = \Phi(\mathrm{Sum}, \mathrm{Min})$$

adică și τ_{Min} derivă de la o operație pe $\mathcal{L}$ și anume de la operația de adunare pe $\mathcal{L}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta că nu orice τ_C derivă de la o operație pe $\mathcal{L}$ să dăm mai întîi

Propoziția 2.2.11. *Fie* $T \in \mathcal{T}_1$, C *o copulă arbitrară iar*

$$G_a(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ a, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x, \end{cases} \qquad H_s(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant s, \\ 1, & s < x, \end{cases}$$

oricare ar fi $a \in [0, 1]$ *și* $s \in \mathbf{R}$. *Atunci vom avea că* $G_a \in \mathcal{R}^+$, *pentru orice* $a \in [0, 1]$, $H_s \in \mathcal{R}^+$ *pentru orice* $s \geqslant 0$ *și în plus*

$$\tau_T(H_s, H_t) = H_{s+t} \text{ oricare ar fi } s, t \in \mathbf{R} \tag{2}$$

$$\sigma_T(G_a, G_b)(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ T(a, b), & 0 < x \leqslant 1, \\ \mathrm{Max}(a, b), & 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x, \end{cases} \text{ oricare ar fi } a, b \in [0, 1] \tag{3}$$

$$\sigma_C(G_a, G_b)(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ C(a, b), & 0 < x \leqslant 1, \\ a + b - C(a, b), & 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases} \tag{4}$$

Demonstrație. Evident că (2) rezultă din observația că $\tau_T(H_s(u), H_t(v)) = 1$ dacă și numai dacă $u > s$ și $v > t$ și este zero în rest. Relația (3) rezultă din definiția lui τ_T și din condiția c) a lui $T \in \mathcal{T}_1$ (definiția 2.2.3). În ceea ce privește relația (4) să observăm că $C(G_a, G_b)$ coincide cu funcția de repartiție bidimensională corespunzătoare la patru puncte de masă situate respectiv în $(0, 0)$ avînd masa $C(a, b)$, în $(0, 1)$ avînd masa $a - C(a, b)$, în $(0, 1)$ avînd masa $b - C(a, b)$ și în $(1, 1)$ avînd masa $1 - a - b + C(a, b)$. Din această observație și din definiția lui σ_C rezultă (4) și propoziția este demonstrată.

Rezultatul principal al acestui paragraf este dat de

Teorema 2.2.2. *Oricare ar fi o funcție* $T \in \mathcal{T}_1$ *cu proprietatea că* $T \neq \mathrm{Min}$ *avem că operația* τ_T *definită prin* (1'') *nu derivă de la nici o operație de pe spațiul variabilelor aleatoare* $\mathcal{L}$.

Demonstrație. Să presupunem că τ_T este derivabilă de la o operație pe $\mathcal{L}$ adică există o funcție convenabilă g. Fie X și Y variabile aleatoare aproape sigur constante și care primesc respectiv valorile x și y. Atunci $F_X = H_x$ și $F_Y = H_y$ iar din propoziția de mai sus rezultă că $\tau_T(F_X, F_Y) = H_{x+y}$. Atunci conform definiției 2.2.2 avem că $F_{g(X,Y)} = H_{x+y}$ ceea ce înseamnă că $g(X, Y) = x + y$ aproape sigur adică avem că $g(x, y) = x + y$ deci g coincide cu operația de adunare căci x și y sînt arbitrare. Rezultă conform definiției 2.2.2 și a definiției lui σ_C că avem

$$\tau_T(F_X, F_Y) = F_{g(X,Y)} = F_{X+Y} = \sigma_{C_{XY}}(F_X, F_Y) \tag{5}$$

unde C_{XY} este o copulă de legătură pentru X și Y.

Pe de altă parte avînd $T \neq \mathrm{Min}$ rezultă că există $a, b \in (0, 1)$ astfel încît să avem $T(a, b) \neq \mathrm{Min}(a, b)$. Fie X variabila aleatoare care ia valoarea zero cu probabilitatea a și valoarea 1 cu probabilitatea $1-a$. Atunci $F_X = G_a$ și analog să considerăm pe Y astfel încît $F_Y = G_b$. Vom avea conform lui (5) că

$$\tau_T(G_a, G_b) = \sigma_{C_{ab}}(G_a, G_b)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde C_{ab} este copula de legătură a lui X și Y. Atunci folosind (3) și (4) obținem

$$\sigma_T(G_a, G_b)\left(\frac{1}{2}\right) = T(a, b) = \sigma_{C_{ab}}(G_a, G_b)\left(\frac{1}{2}\right) = C_{C_{ab}}(a, b)$$

și

$$\sigma_T(G_a, G_b)\left(\frac{3}{2}\right) = \text{Max}\ (a, b) = \sigma_{C_{ab}}(G_a, G_b)\left(\frac{3}{2}\right) = a + b - C_{ab}(a, b)$$

Pe de altă parte avem

$$\text{Min}\ (a, b) \neq T(a, b) = C_{ab}(a, b) = a + b - \text{Max}\ (a, b) = \text{Min}\ (a, b)$$

contradicție care exclude existența lui g și teorema este demonstrată.

În particular putem lua $T = C$ și deci τ_C nu poate coincide cu $\Phi(g, C)$. Cum τ_C este în general comutativă, asociativă, monotonă și continuă în topologia convergenței slabe pe $\mathcal{R}$ aceasta ne arată că există operații destul de naturale pe $\mathcal{R}$ care nu corespund în nici o manieră simplă la operații pe $\mathcal{L}$. În schimb am văzut că pentru orice copulă C operațiile binare σ_C și π_C sînt simplu legate de funcții corespunzătoare pe $\mathcal{L}$ și în particular aceasta are loc și cînd C este astfel aleasă ca aceste operații să fie funcții triunghiulare.

În ceea ce privește legătura dintre τ_C și alte operații pe în raport cu relația de ordine vom avea

Propoziția 2.2.12. *Oricare ar fi o copulă bidimensională C pe $\mathcal{R}^+$ avem că*

$$\tau_{T_m} \leqslant \tau_C \leqslant \sigma_C \leqslant \pi_C \leqslant \pi_{\text{Min}}$$

în sensul că $\tau_C(F_1, F_2) \leqslant \sigma_C(F_1, F_2)$ pentru orice $F_1, F_2 \in \mathcal{R}^+$. Toate aceste inegalități rămîn adevărate și în $\mathcal{R}$ cu excepția lui $\sigma_C \leqslant \pi_C$.

Aceste rezultate permit să stabilim mai clar legăturile și deosebirile ce există între spațiile metrice probabiliste și spațiile metrice aleatoare, între spațiul informațiilor probabiliste și spațiul informațiilor aleatoare [128], [129], [131], [245], [247], [264], [250].

§ 3. CONSIDERAȚII ASUPRA UNOR METRICI ȘI OPERAȚII INTERNE PE ANUMITE SUBSPAȚII ALE LUI $\mathcal{R}$

În general în paragrafele anterioare am tratat amănunțit subspațiul $\mathcal{R}^+ \subset \mathcal{R}$ înzestrat cu matrica $d_{\mathcal{L}}$ obținînd rezultate importante. Cum și alte subspații ale spațiului de funcții de repartiție generalizate $\mathcal{R}$ prezintă interes, în general înzestrate cu metrica lui Lévy d_L, să dăm o teoremă care să sintetizeze proprietățile celor opt spații de funcții înzestrate cu metrica Lévy d_L sau metrica lui Sibley $d_{\mathcal{L}}$ și cu operațiile interne τ_T, π_T sau convoluția „$*$“. Deci vom avea respectiv notațiile

$$(\mathcal{R}, d_L),\ (\mathcal{R}^+, d_L),\ (\mathcal{R}_v, d_L),\ (\mathcal{R}_v^+, d_L),\ (\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}}),\ (\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}}),\ (\mathcal{R}_v, d_{\mathcal{L}}),\ (\mathcal{R}_v^+, d_{\mathcal{L}}).$$

Am analizat parțial problema compacității acestor spații și anume în special pe $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ care am văzut că este compact și deci și $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$ va fi compact fiind un subspațiu închis al lui $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$. Niciunul din spațiile $(\mathcal{R}, d_L)$, $(\mathcal{R}^+, d_L)$, $(\mathcal{R}_v, d_L)$, $(\mathcal{R}_v^+, d_L)$ nu este compact întrucît în fiecare dintre acestea

Scanned with OKEN Scanner

$\{H_n\}$, $H_n(x) = H_0 = H_0(x - n) = 0$ pentru $x \leqslant n$, $H_n(x) = 1$ pentru $x > n$, nu conține nici un subșir convergent în metrica d_L. În mod analog nici $(\mathcal{R}_v, d_{\mathcal{L}})$ și $(\mathcal{R}_v^+, d_{\mathcal{L}})$ nu sînt compacte deoarece $\lim_{n\to\infty} H_n = H_\infty$ nu aparține lui $\mathcal{R}_v$ sau $\mathcal{R}_v^+$.

Proprietățile algebrice și topologice ale diferitelor operații pe aceste spații sînt date de

Teorema 2.3.1. 1) *Toate cele 4 spații* $\mathcal{R}, \mathcal{R}^+, \mathcal{R}_v, \mathcal{R}_v^+$ *sînt închise relativ la operațiile* τ_T, π_T, $*$.

2) *În fiecare dintre spațiile amintite are loc proprietatea de comutativitate a operațiilor* τ_T, π_T, $*$.

3) *În fiecare dintre spațiile de mai sus este verificată asociativitatea operațiilor* τ_T, π_T, $*$.

4) *Toate cele trei operații amintite păstrează ordinea în spațiile respective*

5) *Funcția* H_0 *este un element unitate, în semigrupurile respective, în afară de cazurile:*

5′) $(\mathcal{R}, \pi_T)$ *are ca element unitate funcția constantă* 1

5″) $(\mathcal{R}_v, \pi_T)$ *nu are element unitate*

6) *Dacă* T *este o t-normă continuă atunci operația* π_T *este continuă în raport cu ambele variabile în oricare dintre cele opt spații considerate mai sus.*

7) *Dacă* T *este o t-normă continuă operația* τ_T *este continuă în raport cu ansamblul celor două variabile în șapte dintre spațiile considerate, adică exclusiv* $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$.

8) *Convoluția este continuă pe spațiile amintite în afară de* $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$.

Demonstrație: 1) Proprietatea de închidere a lui $\mathcal{R}$ și $\mathcal{R}^+$ față de τ_T a fost demonstrată în teorema 2.1.20 și corolarul corespunzător. Să ne ocupăm de verificarea închiderii față de operația τ_T în $\mathcal{R}_v$ considerînd $F, G \in \mathcal{R}_v$ și observînd că T fiind continuă la stînga putem scrie că

$$\lim_{x\to\infty} \tau_T(F, G; x) \geqslant \lim_{x\to\infty} T\left(F\left(\frac{x}{2}\right), G\left(\frac{x}{2}\right)\right) = T\left(\lim_{x\to\infty} F\left(\frac{x}{2}\right), \lim_{x\to\infty} G\left(\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= T(1, 1) = 1$$

Pe de altă parte este ușor de văzut că există un element $F_1 \in \mathcal{R}_v$ astfel încît $F \leqslant F_1$, $G \leqslant F_1$ și cum $T \leqslant \mathrm{Min}$ avem că

$$\tau_T(F, G) \leqslant \tau_T(F_1, F_1) \leqslant \sigma_{\mathrm{Min}}(F, F_1)$$

Dar se verifică ușor că $\tau_{\mathrm{Min}}(F_1, F_1; x) = F_1\left(\frac{x}{2}\right)$ și deci avem că

$$0 \leqslant \lim_{x\to\infty} \tau_T(F, G; x) \leqslant \lim_{x\to\infty} F_1\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Rezultă că $\tau_T(F, G; -\infty) = 0$ și $\tau_T(F, G; +\infty) = 1$ adică $\mathcal{R}_v$ este închisă relativ la τ_T iar închiderea lui $\mathcal{R}_v^+$ relativ la τ_T rezultă din această constare și din proprietatea de închidere a lui $\mathcal{R}^+$ relativ la τ_T.

Proprietatea de închidere a oricăruia dintre spațiile $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{R}_v$, $\mathcal{R}_v^+$ față de π_T este evidentă și deasemenea se verifică ușor și pentru convoluție din proprietățile ei deduse din definiție.

Scanned with OKEN Scanner

2) Comutativitatea operațiilor τ_T și π_T rezultă imediat din definiție și deasemenea pentru convoluție pe $\mathcal{R}_v$ și $\mathcal{R}_v^+$ se verifică ușor iar cu privire la $\mathcal{R}$ în [154] se dă justificare prin calcul pentru subspațiul lui $\mathcal{R}$ cu proprietatea că fiecare element F satisface condiția $F(-\infty) = 0$ de unde rezultă comutativitatea pe $\mathcal{R}^+$, urmînd ca pe $\mathcal{R}$ să rezulte din același raționament asociind fiecărui element F elementul normalizat $\bar{F}$ dat prin $\bar{F}(x) = F(x) - F(-\infty)$ pentru orice $F \in \mathcal{R}$ și ținînd seama că integrala Lebesgue-Stieltjes folosită în [154] are proprietatea că $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{[-\infty, \infty]}$.

3) Asociativitatea lui τ_T pe $\mathcal{R}^+$ a fost demonstrată în teorema 2.1.20 și poate fi fără dificultate extinsă pentru $\mathcal{R}$ ceea ce implică conform lui 1) și asociativitatea pe $\mathcal{R}_v$ și $\mathcal{R}_v^+$. Cu privire la asociativitatea lui π_T și $*$ se verifică ușor că are loc pentru π_T iar pentru $*$ rezultă printr-un raționament similar cu cel din 2).

4) și 5) sînt evidente prin verificări directe.

6) Continuitatea lui π_T pe $(\mathcal{R}^+, d_\mathcal{L})$ s-a demonstrat în teorema 2.1.26, raționament ce se poate extinde și la $(\mathcal{R}, d_\mathcal{L})$ și din care rezultă imediat continuitatea lui π_T pe $(\mathcal{R}_v, d_\mathcal{L})$ și pe $(\mathcal{R}_v^+, d_\mathcal{L})$.

Să ne ocupăm de continuitatea lui π_T pe $(\mathcal{R}, d_L)$. Să observăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ din uniform continuitatea lui T pe $[0, 1]\times[0, 1]$ rezultă că există un $\eta > 0$ astfel încît să avem

$$(1) \qquad |T(a, b) - T(a', b')| < \varepsilon \text{ pentru } |a - a'| < \eta \text{ și } |b - b'| < \eta$$

Să considerăm un δ cu proprietatea $0 < \delta < \text{Min}(\varepsilon, \eta, 1)$ și să presupunem că $d_L(F, F') < \delta$ și $d_L(G, G') < \delta$ atunci avem că

$$(2) \qquad F'(x - \delta) - \delta \leqslant F(x) \leqslant F'(x + \delta) + \delta$$

și

$$(3) \qquad G'(x - \delta) - \delta \leqslant G(x) \leqslant G'(x + \delta) + \delta$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și putem scrie că

$$\pi_T(F', G'; x - \varepsilon) - \varepsilon = T(F'(x - \varepsilon), G'(x - \varepsilon)) - \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant T(F'(x - \delta), G'(x - \delta)) - \varepsilon \leqslant T(F'(x - \delta) - \delta, G'(x - \delta) - \delta) \leqslant$$

$$\leqslant T(F(x), G(x)) \leqslant T(F'(x + \delta) + \delta, G'(x + \delta) + \delta) \leqslant$$

$$\leqslant T(F'(x + \delta), G'(x + \delta)) + \varepsilon \leqslant T(F'(x + \varepsilon), G'(x + \varepsilon)) + \varepsilon =$$

$$= \pi_T(F', G'; x + \varepsilon) + \varepsilon$$

Deci avem că $d_L(\pi_T(F, G), \pi_T(F', G')) < \varepsilon$ adică tocmai continuitatea lui π_T pe $(\mathcal{R}, d_L)$.

Din continuitatea lui π_T pe $(\mathcal{R}, d_L)$ rezultă imediat această proprietate și pe $(\mathcal{R}^+, d_L)$, $(\mathcal{R}_v, d_L)$, $(\mathcal{R}_v^+, d_L)$.

7) Pentru a demonstra continuitatea lui τ_T pe $(\mathcal{R}, d_L)$, $(\mathcal{R}^+, d_L)$, $(\mathcal{R}_b, d_L)$, $(\mathcal{R}_v^+, d_L)$ este suficient s-o demonstrăm pe $(\mathcal{R}, d_L)$. În acest scop să considerăm un $\varepsilon > 0$ și un δ cu proprietatea că $0 < \delta < \varepsilon/2$ și în plus este verificată condiția (1) pentru $|a - a'| < \delta$ și $|b - b'| < \delta$.

Scanned with OKEN Scanner

Să alegem $F, F', G, G' \in \mathcal{R}$ astfel încît $d_L(F, F') < \delta$, $d_L(G, G') < \delta$ din care deducem că au loc relațiile (2) și (3) pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și prin urmare pentru orice $u, v \in \mathbf{R}$ obținem că

$$T(F'(u-\delta), G'(v-\delta)) - \varepsilon \leqslant T(F'(u-\delta)-\delta,\ G'(v-\delta)-\delta) \leqslant$$
$$\leqslant T(F(u),\ G(v)) \leqslant T(F'(u+\delta)+\delta,\ G'(v+\delta)+\delta) \leqslant$$
$$\leqslant T(F'(u+\delta), G'(v+\delta)) + \varepsilon.$$

În consecință pentru orice $x \in \mathbf{R}$ putem scrie că

$$\sup_{u+v=x} T(F'(u-\delta), G'(v-\delta)) - \varepsilon \leqslant \tau_T(F, G; x) \leqslant \sup_{u+v=x} T(F'(u+\delta), G'(v+\delta)) + \varepsilon$$

sau relația echivalentă

$$\sup_{u+v-2\delta=x-2\delta} T(F'(u-\delta), G'(v-\delta)) - \varepsilon \leqslant \tau_T(F, G; x) \leqslant \sup_{u+v+2\delta=x+2\delta} T(F'(u+\delta), G'(v+\delta)) + \varepsilon$$

adică

$$\tau_T(F', G';\ x-2\delta) - \varepsilon \leqslant \tau_T(F, G; x) \leqslant \tau_T(F', G';\ x+2\delta) + \varepsilon$$

și cum $2\delta < \varepsilon$ deducem că

$$\tau_T(F', G';\ x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant \tau_T(F, G; x) \leqslant \tau_T(F', G', x+\varepsilon) + \varepsilon.$$

Deci am obținut că $d_L(\tau_T(F, G),\ \tau_T(F', G')) < \varepsilon$ adică tocmai continuitatea lui τ_T pe $(\mathcal{R}, d_L)$.

Continuitatea lui τ_T pe $(\mathcal{R}^+, d_L)$ s-a demonstrat în teorema 2.1.21. Pentru a demonstra continuitatea lui τ_T pe $(\mathcal{R}_v, d_L)$ să considerăm două șiruri $\{F_n\}$, $\{G_n\}$ de elemente din $\mathcal{R}_v$ cu proprietatea că $d_{\mathcal{L}}(F_n, F) \to 0$ și $d_{\mathcal{L}}(G_n, G) \to 0$ pentru $n \to \infty$, F și G fiind tot elemente din $\mathcal{R}_v$. Atunci conform proprietăților stabilite în teorema 2.1.18 rezultă că $F_n \xrightarrow{sl.} F$ și $G_n \xrightarrow{sl.} G$ pentru $n \to \infty$. Dar pe $\mathcal{R}_v$ convergența slabă și convergența în metrica Lévy sînt echivalente după cum s-a arătat în teorema 2.1.16 adică $d_L(F_n, F) \to 0$, $d_L(G_n, G) \to 0$, $n \to \infty$. Cum τ_T s-a arătat mai sus că este continuă pe $(\mathcal{R}, d_L)$ obținem că $d_L(\tau_T(F_n, G_n), \tau_T(F, G)) \to 0$. Din teorema 2.1.18 se știe că $d_{\mathcal{L}} \leqslant d_L$ și rezultă că $d_{\mathcal{L}}((\tau_T(F_n, G_n), \tau_T(F, G)) \to 0$ pentru $n \to \infty$ adică chiar continuitatea pe $(\mathcal{R}_v, d_{\mathcal{L}})$ din care rezultă și continuitatea pe $(\mathcal{R}_v^+, d_{\mathcal{L}})$ acesta fiind un subspațiu închis în $(\mathcal{R}_v, d_{\mathcal{L}})$.

Afirmația că τ_T nu este continuă pe $(\mathcal{R}, d_{\mathcal{L}})$ rezultă din următorul contraexemplu:

Fie $F_n(x) = H_0(x-n) = H_n(x)$ și $G_n = 1/2$, $n \in \mathbf{N}$, atunci $F_n \xrightarrow{sl.} H_\infty$ și $G_n \xrightarrow{sl.} 1/2$ pentru $n \to \infty$ de unde rezultă că

$$d_{\mathcal{L}}(F_n, H_\infty) \to 0 \quad \text{și} \quad d_{\mathcal{L}}(G_n, 1/2) \to 0 \quad \text{pentru} \quad n \to \infty$$

Pe de altă parte oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ avem că

$$\tau_T(H_\infty, 1/2; x) = \sup_{u+v=x} T(H_\infty(u), 1/2) = 0$$

în timp ce pentru orice număr natural n

$$\tau_T(F_n, G_n; x) = \sup_{u+v=x} T(H_n(u), 1/2) = 1/2$$

deoarece se poate întotdeauna alege $u > n$. Deci șirul $\tau_T(F_n, G_n)$ nu converge slab la H_∞ și atunci nici $d_{\mathcal{L}}(\tau_T(F_n, G_n), H_\infty)$ nu converge la zero.

Scanned with OKEN Scanner

8) Să ne ocupăm de continuitatea convoluției pe $(\mathcal{R}, d_L)$ în care scop să considerăm $F, F', G, G' \in \mathcal{R}$ cu proprietatea că $d_L(F, F') < \delta$ și $d_L(G, G') < \delta$ deci pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem verificate condițiile (2) și (3). Atunci folosindu-ne de (2) putem scrie

$$(F * G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, dG(y) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (F'(x+\delta-y)+\delta)\, dG(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(x+\delta-y)\, dG(y) + \delta \int_{-\infty}^{\infty} dG(y) \leqslant (F' * G)(x+\delta) + \delta = (G * F')(x+\delta) + \delta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(x+\delta-y)\, dF'(y) + \delta \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} G'(x+2\delta-y)\, dF'(y) + \delta + \delta =$$

$$= (G' * F')(x+2\delta) + 2\delta = (F' * G')(x+2\delta) + 2\delta.$$

În mod analog deducem că $(F' * G')(x-2\delta) - 2\delta \leqslant (F * G)(x)$ de unde rezultă că $d_L(F' * G', F * G) \leqslant 2\delta$ și deci continuitatea convoluției pe $(\mathcal{R}, d_L)$ este justificată. De altfel aceeași demonstrație se poate repeta și pentru $(\mathcal{R}_v, d_L)$ după cum se poate constata în [246].

Continuitatea convoluției pe $(\mathcal{R}_v, d_\mathcal{L})$ se poate deduce cu aceleași raționamente ca în 7) din continuitatea pe $(\mathcal{R}, d_L)$ și echivalența convergenței în metrica $d_\mathcal{L}$, a convergenței slabe și a convergenței în metrica d_L pe $\mathcal{R}_v$. Analog ca în 7) se deduce și continuitatea convoluției pe $(\mathcal{R}_v^+, d_\mathcal{L})$ iar pe $(\mathcal{R}^+, d_\mathcal{L})$ s-a demonstrat în teorema 2.1.19.

Faptul că operația de convoluție nu este continuă pe $(\mathcal{R}, d_\mathcal{L})$ se justifică cu același contraexemplu ca în 7) după cum rezultă din comentariul ce succede teorema 2.1.19 și cu aceasta teorema dată este complet demonstrată.

Rezultă din această teoremă și din cele prezentate în subparagrafele ce se ocupă în mod special de fiecare dintre operațiile amintite că spațiul ce prezintă un interes deosebit este $(\mathcal{R}^+, d_\mathcal{L})$ și deasemenea că mai convenabile spații de lucru sînt $(\mathcal{R}^+, d_\mathcal{L}, \tau_T)$, $(\mathcal{R}^+, d_\mathcal{L}, \pi_T)$, $(\mathcal{R}^+, d_\mathcal{L}, *)$ care sînt fiecare dintre ele semigrupuri topologice comutative compacte, parțial ordonate avînd cel mai mic element elementul zero (H_∞) și cel mai mare element, elementul unitate (H_0).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

IDEI ȘI REZULTATE FUNDAMENTALE ÎN TEORIA STRUCTURILOR PROBABILISTE

Dezvoltarea diferitelor ramuri ale matematicii și în special a acelora cu caracter aplicativ mai pronunțat a condus la schimbarea relațiilor dintre matematică și alte științe sau dintre diferite ramuri ale matematicii însăși. În acest sens menționăm schimbările ce au apărut în ultimele cinci-șase decenii în relațiile dintre teoria probabilităților și analiza matematică. Astfel, dacă la începutul perioadei menționate problemele teoriei probabilităților se rezolvau cu metode analitice, în ultima parte metodele probabiliste își găsesc tot mai multe aplicații la rezolvarea unor probleme ale analizei. Pe fondul îmbinărilor acestor două ramuri s-a născut și s-a dezvoltat foarte rapid un nou domeniu care se numește analiză probabilistă. Acest nou domeniu are printre puternicele sale instrumente integralele stocastice și ecuațiile diferențiale stocastice. Aceste instrumente permit construirea unor clase largi de procese stocastice și dau posibilitatea reducerii studiului ecuațiilor cu derivate parțiale de tip eliptic sau parabolic la studiul sistemelor de ecuații diferențiale obișnuite sau uneori stocastice.

Geometrizarea și analiticizarea considerabilă a fizicii a condus la noi rezultate și interpretări ale unor fenomene ale naturii care apar în lumea microcosmosului cît și a macrocosmosului, acestea la rîndul lor, au stimulat apariția unor noi abordări a noțiunii de spațiu și a altor structuri sau relații matematice fundamentale ce modelează aspecte ale lumii reale.

Progresele cu profundă semnificație științifică din domeniul teoriei relativității și al teoriei cuantice, obținute în prima parte a secolului al XX-lea, împreună cu descoperirea multor particule elementare noi, au stimulat pe filozofi, fizicieni și matematicieni să-și reconsidere ideile unanim acceptate cu privire la distribuirea în spațiu și în timp a particulelor, cu privire la modul de a aborda noțiunea de spațiu și alte concepte fundamentale utilizate în matematică sau în fizică. Literatura de specialitate înregistrează numeroase idei și metode pentru fundamentarea unui aparat matematic adecvat, a unei geometrii corespunzătoare care să ofere posibilități mai largi de interpretare a cît mai multor fenomene reale. Este suficient să amintim numai cîteva dintre lucrările unor reprezentați de seamă ca M. Born [30], L. de Broglie [33], H. Poincaré [210], N. Rosen [225], H. Weyl [293], N. Wiener [294]. Meritul elaborării concepției axiomatice generale a spațiilor metrice statistice îi aparține lui K. Menger [167] care se ocupă de geometria probabilistă [170], de teoria probabilistă a relațiilor [169], [170], de implicațiile matematice ale

Scanned with OKEN Scanner

unor idei fundamentale ale unor filozofi-fizicieni sau matematicieni ca H. Poincaré, A. Einstein şi alţii, obţinînd o valorificare nouă şi fertilă, de direcţiile de dezvoltare ale geometriei generale [172], [174], de teoria generală a funcţiilor şi variabilelor etc.

Noua teorie probabilistă a structurilor fundamentale este ulterior dezvoltată în numeroase lucrări după cum rezultă din bibliografie. Dintre cele mai reprezentative contribuţii la închegarea acestui domeniu de cercetare, menite să uşureze rezolvarea cerinţelor amintite, menţionăm pe A. Wald [291], B. Schweizer şi A. Sklar [232], [233], [240], [249], A. Špaček [277], [279], O. Onicescu [198], [204], E. Thorp [283], A. N. Šerstnev [268], [269], [271], R. Stevens [267], H. Sherwood [256], [259], M. J. Frank [80], [81], D. Mushtari [190], Istrăţescu [122], [124], G. Sâmboan ş.a, [230], B. J. Prochaska [213], D. J. Blokhintsev [17], [19], A. T. Bharucha-Reid [13], [14] şi alţii. În acest mod s-a deschis un drum larg generalizărilor care încadrează multe concepte clasice, reuşind să ofere noi perspective teoriei probabilităţilor, statisticii matematice sau analizei matematice.

O sinteză a contribuţiilor privind structurile metrice probabiliste şi alte concepte ale analizei face obiectul primului paragraf. Conexiunea dintre procesele aleatoare şi spaţiile metrice probabiliste, rezultate privind topologia probabilistă, spaţiile normate probabiliste şi aplicaţii liniare pe ele împreună cu probabilizarea unor algebre normate, sînt aspecte asupra cărora deasemenea ne vom opri în acest capitol. În încheiere vom expune cele mai reprezentative idei privind existenţa şi unicitatea punctelor fixe cu promiţătoare aplicaţii în analiza probabilistă.

§ 1. PUNCTE DE VEDERE PROBABILISTE ÎN ABORDAREA UNOR CONCEPTE ALE ANALIZEI MATEMATICE

O prezentare unitară a rezultatelor privind teoria probabilistă a relaţiilor şi în special a structurilor metrice şi generalizări ale lor ne va permite să desprindem stadiul actual al acestui domeniu.

1.1. O TEORIE PROBABILISTĂ A RELAŢIILOR

H. Poincaré, în cîteva din faimoasele sale eseuri de filozofia ştiinţei, caracterizează deosebirea dintre matematică şi fizică prin aceea că în studiul continuului matematic relaţia de egalitate este tranzitivă în timp ce în cadrul continuului fizic observabil „egalitate" înseamnă „indiscernabilitate". Din acest motiv în continuul fizic este posibil să existe elemente A, B, C cu proprietăţile: $A = B$, $B = C$ dar $A \neq C$. Deci există elemente B indiscernabile faţă de două elemente A şi C discernabile între ele. Poincaré defineşte continuul fizic printr-un sistem de elemente S cu proprietatea că orice două elemente pot fi unite printr-un lanţ de elemente din S cu proprietatea că fiecare element din lanţ este indiscernabil faţă de elementele apropiate de el.

În direcţia dezvoltării acestor idei ale lui Poincaré se pot menţiona cel puţin două salturi stimulate de noul mod de abordare a geometriei. Una din căi a fost aceea care constă în inversarea procedeului tradiţional de a considera punctele ca noţiuni primare şi considerarea unei noi entităţi primare, aceea de ansamblu (morceaux sau lump) iar punctul se defineşte cu ajutorul unor şiruri, unor mulţimi sau unor intersecţii de ansamble (lumpuri). De exemplu, Wald abordează probleme ale teoriei dimensiunii definind punctele

Scanned with OKEN Scanner

unui spațiu topologic cu ajutorul unor șiruri de lumpuri. El tratează astfel spațiile separabile și metrizabile, a căror mulțime are o putere ce depășește puterea continuului. K. Menger simplificînd metoda lui Wald definește spațiile compacte și metrizabile a căror mulțime are puterea continuului. R. L. Moore aplică abordarea noțiunii de punct în plan utilizînd ideea amintită. Oarecum sînt înrudite și alte teorii, cu o orientare mai accentuată spre algebră decît spre geometrie. Ele au fost dezvoltate de Stone, Wallmann și Milgram, care introduc punctele cu ajutorul unor mulțimi nenumărabile de elemente ale inelelor booleene, laticilor distributive sau mulțimilor parțial ordonate. O altă cale a fost aceea de a introduce probabilitățile în fundamentele geometriei dezvoltîndu-se o geometrie metrică statistică inițiată de K. Menger în 1942 [167]. Ideea de bază este de a prinde într-o formulare matematică coerentă realitatea existentă în multe procese de măsurare cînd nu putem afirma cu certitudine că rezultatul obținut este corect și de asemenea cu privire la certitudinea apartenenței unui element la o mulțime sau cu privire la discernabilitatea a două elemente. K. Menger propune înlocuirea numărului $d(p, q)$, care exprimă, teoretic, distanța dintre p și q, printr-o funcție de repartiție F_{pq} a cărei valoare în $x \in \mathbf{R}$, $F_{pq}(x)$, este interpretată drept probabilitatea ca distanța dintre p și q să fie mai mică decît x și are anumite proprietăți sugerate de cele ale distanței. El sugerează [169], [171] o teorie probabilistă a relațiilor și în particular a relației de apartenență a unui element la o mulțime introducînd mulțimile vagi (flou sa hazy), noțiune reluată într-o formă ușor modificată de către Bellman, Kalaba și Zadeh [8] sub numele de fuzzy. K. Menger obține rezultate privind relația de egalitate, relația de ordine sau funcțiile de mai multe variabile, în care se încadrează și metricile probabiliste.

Pornind de la faptul că în cazul experimental egalitatea înseamnă indiscernabilitate, se propune descrierea ei prin asocierea unei probabilități perechilor de elemente analizate A și B, probabilitate care practic este dată de frecvența relativă a cazurilor în care ele sînt indiscernabile. În acest mod devine explicabilă caracterizarea dată de Poincaré continuului fizic în sensul că este posibil să fie foarte probabilă indiscernabilitatea lui A și B precum și a lui B și C dar mai puțin probabilă a lui A și C. Notînd cu $P(a, b)$ probabilitatea ca a și b să fie egale, par naturale următoarele axiome:

1) $P(a, a) = 1$ pentru orice a (reflexivitate),

2) $P(a, b) = P(b, a)$ pentru orice a și b (simetrie),

3) $P(a, b) \cdot P(b, c) \leqslant P(a, c)$ pentru orice a, b și c (un minim de tranzitivitate).

Elementele pentru care $P(a, b) = 1$ se vor numi cert egale sau echivalente. Reunind elementele egale cu a într-o clasă A, $a \in S$, se obține o partiție a spațiului S în clase disjuncte sau identice numite mulțimi de echivalență certă. Se poate defini $P(A, B)$ ca fiind probabilitatea ca orice două elemente din A și respectiv din B să fie egale și se constată că acest număr este independent de alegerea particulară a elementelor. Schimbînd, la nevoie, elementele prin mulțimi de echivalență certă se poate presupune că $P(x, y) < 1$ pentru orice $x \neq y$ și se poate introduce noțiunea de lump (morceaux) ca fiind mulțimea care odată cu elementul x, conține toate elementele y astfel că $P(x, y) > 0$. Două lumpuri vor fi sau disjuncte sau identice iar două elemente ce aparțin la două lumpuri disjuncte sînt cert neechivalente ($P(x, y) = 0$). Notînd $-\log P(A, B) = d(A, B)$ se obține că d este o metrică.

Scanned with OKEN Scanner

Utilizînd t-normele se pot da și alte relații probabiliste.

Definiția 3.1.1. Se numește *T-echivalență probabilistă* pe o mulțime nevidă S, o pereche (T, P) unde T este o t-normă iar P o aplicație $P:S\times S\to(0, 1]$ care verifică axiomele

$T_1) P(a, a) = 1,$
$T_2) P(a, b) = P(b, a),$
$T_3) P(a, c) \geqslant T(P(a, b), P(b, c))$ oricare ar fi $a, b, c \in S$.

Propoziția 3.1.1. *Fie (T, P) o relație de T-echivalență probabilistă pe S unde T este o t-normă strictă cu generatorul aditiv f, atunci $d_f(A, B) = f(P(a, b))$, unde $A, B \in \widetilde{S}$, $a \in A$, $b \in B$, este o metrică pe $\widetilde{S} = S/\sim$.*

Propoziția 3.1.2. *Dacă d este o metrică pe $\widetilde{S}$ și T o t-normă strictă cu generatorul aditiv f, atunci.*

$$P(a, b) = f^{-1}(d(A, B)),\quad a\in A,\ b\in B,\ A, B\in\widetilde{S}$$

este o relație de T-echivalență probabilistă pe S.

Propoziția 3.1.3. *Fie T_1 și T_2 două t-norme stricte cu generatorii aditivi f_1 și f_2. Dacă (T_2, P) este o relație de echivalență probabilistă pe S și $T_2 \geqslant T_1$ atunci $d_1 = f_1 \circ P$ și $d_2 = f_2 \circ P$ sînt metrici echivalente pe $\widetilde{S}$.*

Dacă se abordează probabilist relația de ordine „a precede pe b", notînd prin $P(a, b)$ probabilitatea ca relația să aibă loc, sînt naturale următoarele condiții

a) dacă $a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant b_1$ atunci $P(a_2, b_2) \leqslant P(a_1, b_1)$ (monotonie),
b) $\lim\limits_{y\to\infty} P(a, y) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(x, b) = 1$ (condiții la limită),
c) $P(a, b) + P(b, a) = 1$ (asimetrie),
d) $P(a, b) \cdot P(b, c) \leqslant P(a, c)$ (tranzitivitate).

Un astfel de exemplu îl oferă relația

$$P(a, b) = \begin{cases} k^{(b-a)/2} \text{ dacă } b \leqslant a,\ k>1, \\ 1 - k^{(a-b)/2} \text{ dacă } b>a,\ k>1 \end{cases}$$

Acest exemplu verifică o condiție de omogenitate: $P(a, b) = P(a', b')$ dacă $b' - a' = b - a$, însă pentru a a avea loc d) trebuie admis că fiecare număr, oricît de mare, are o probabilitate pozitivă de a precede pe zero.

Definiția 3.1.2. Se numește relație de T-ordine probabilistă pe mulțimea S, un triplet (T, P, Q), unde T este o t-normă iar $P, Q:S\to[0, 1]$ (se notează $R = P + Q$) și sînt verificate condițiile

$O_1)$ $Q(a, a) = 0$
$O_2)$ $R(a, b) + Q(b, a) = 1$
$O_3)$ $R(a, c) \geqslant T(R(a, b), R(b, c))$ pentru $a, b, c \in S$.

În această definiție $P(a, b)$ se interpretează ca și probabilitatea ca a să fie echivalent cu b, $Q(a, b)$ ca și probabilitatea ca $a \prec b$ iar $R(a, b)$ ca și probabilitatea de a avea $a \succcurlyeq b$.

Propoziția 3.1.4. *Fie (T, P, Q) o relație de T-ordine probabilistă. Dacă s-a definit relația de echivalență $\sim$ (prin $a \sim b$ dacă $P(a, b) = 1$) atunci $(T, \widetilde{P}, \widetilde{Q})$ este o relație de T-ordine probabilistă pe $\widetilde{S} = S/\sim$ unde $\widetilde{P}(A, B) = P(a, b)$, $\widetilde{Q}(A, B) = Q(a, b)$, $A, B \in \widetilde{S}$, $a \in A$ și $b \in B$.*

Demonstrație. În adevăr relația $\sim$ este o relație de echivalență pe S căci $P(a, a)=1$ rezultă din O_1) și O_2, în plus O_2) implică și simetria acestei relații.

Scanned with OKEN Scanner

Tranzitivitatea se deduce din ipoteza că $a \sim b$ și $b \sim c$ ($P(a, b) = 1$ și $P(b, c) = 1$) și O_3) căci putem scrie

$$R(a, c) \geqslant T(R(a, b),\ R(b, c)) = T(1, 1) = 1$$

Atunci O_2) implică $Q(c, a) = 0$ și analog se obține și $Q(a, c) = 0$ adică $P(a, c) = 1$.

Pentru justificarea consistenței lui $\widetilde{R}(A, B) = R(a, b)$, $A, B \in \widetilde{S}$, $a \in A$, $b \in B$ observăm că $P(a, a') = 1$ și $P(b, b') = 1$ împreună cu O_3) ne dă

$$R(a, b) \geqslant T(R(a, a'),\ R(a', b)) = R(a', b) \geqslant T(R(a', b'),\ R(b', b)) = R(a', b')$$

Analog se deduce și $R(a', b') \geqslant R(a, b)$ adică $R(a, b) = R(a', b')$.

Pentru a arăta că $\widetilde{P}$ este bine definită vom scrie că $P(a, b) = R(a, b) + R(b, a) - 1 = R(a', b') + R(b', a') - 1 = P(a', b')$. Avînd acum P și R bine definite rezultă că și $\widetilde{Q} = \widetilde{R} - \widetilde{P}$ este bine definită iar verificarea axiomelor $O_1) - O_3)$ rezultă imediat pentru $(T, \widetilde{P}, \widetilde{Q})$.

Corolar. *Dacă $\widetilde{P}$ este trivială (adică $\widetilde{P}(A, B) = 0$ pentru $A \neq B$) atunci $\widetilde{Q}$ se poate considera ca independentă de $\widetilde{P}$ și avem*

Q_1) $\widetilde{Q}(A, A) = 0$,

Q_2) $\widetilde{Q}(A, B) + \widetilde{Q}(B, A) = 1$ dacă $A \neq B$,

Q_3) $\widetilde{Q}(A, C) \geqslant T(\widetilde{Q}(A, B), \widetilde{Q}(B, C))$ dacă $A \neq C$.

Să arătăm că în cazul cînd $\widetilde{P}$ este trivială și $T = \text{Min}$ se poate obține o relație de ordine totală. Mai întîi dăm

Lema 3.1.1. *Dacă $\widetilde{P}$ este trivială și $T = \text{Min}$ atunci avem că*

$$\text{Max}\,(\widetilde{Q}(A, B),\ \widetilde{Q}(B, C)) \geqslant \widetilde{Q}(A, C),\ A, B, C \in \widetilde{S}$$

Demonstrație. Relația este evidentă pentru $A = B$ sau $B = C$ sau $A = C$ iar în cazul $A \neq B \neq C$ avem

$$\widetilde{Q}(C, A) \geqslant \text{Min}(\widetilde{Q}(C, B),\ \widetilde{Q}(B, A))$$

din care rezultă

$$\widetilde{Q}(A, C) = 1 - \widetilde{Q}(C, A) \leqslant 1 - \text{Min}\,(1 - \widetilde{Q}(B, C),\ 1 - \widetilde{Q}(A, B)) = \text{Max}\,(\widetilde{Q}(A, B),\ \widetilde{Q}(B, C))$$

Propoziția 3.1.5. *Dacă $\widetilde{P}$ este trivială, $T = \text{Min}$ și definim pe $\widetilde{S}$ relația $A \sim B$ dacă și numai dacă $A = B$ sau $\widetilde{Q}(A, B) = \frac{1}{2}$, atunci*

1) *relația $\sim$ este o relație de echivalență pe $\widetilde{S}$,*

2) *$\bar{Q} : \bar{S} \to [0, 1]$ este bine definită, unde $\bar{S} = \widetilde{S}/\sim$, $\bar{Q}(X, X) = 0$, $\bar{Q}(X, Y) = \widetilde{Q}(A, B)$, $X, Y \in \bar{S}$, $A \in X$, $B \in Y$,*

3) *dacă luăm $X \leqslant Y$ dacă și numai dacă $\bar{Q}(X, Y) > \bar{Q}(Y, X)$ și $X = Y$ dacă și numai dacă $X = Y$ sau $X \leqslant Y$ relația $\leqslant$ este o relație de ordine totală.*

Ideea probabilizării se aplică și relațiilor monare care în sens clasic se confundă cu o parte Q a spațiului dat S. În acest caz sensul probabilist va fi dat printr-o funcție F_Q definită pentru orice $x \in S$. O asemenea funcție este numită de K. Menger [171] mulțime vagă și $F_Q(x)$ se interpretează ca și probabilitatea ca x să aparțină submulțimii Q. Dacă F_Q ia numai valorile 0 și 1 avem o mulțime în sens obișnuit numită mulțime rigidă, de exemplu, F_S

Scanned with OKEN Scanner

sau $F_\emptyset$ care iau respectiv numai valorile 1 și 0, sînt mulțimi rigide (S și $\emptyset$). Reuniunea și intersecția a două mulțimi nerigide nu poate fi determinată numai de mulțimile însăși căci, de exemplu, egalitatea funcțiilor F_A și F_B este o relație probabilistă ce depinde de $F_{A \cup B}$ și $F_{A \cap B}$.

Relațiile, din punct de vedere probabilist, se pot extinde și la funcții reale asociind sistemelor de n elemente (cînd avem funcții de mai multe variabile) numere aleatoare sau funcții de repartiție. În cazul $n = 1$ se asociază fiecărui punct $x \in S$ o funcție de repartiție $F_x(t)$ care se mai notează cu $F(x, t)$ și are ca interpretare probabilitatea ca să se asocieze lui x un număr mai mic decît t. Dacă $S = [a, b] \subseteq \mathbf{R}$ se obține pentru $t \in \mathbf{R}$ o curbă C_t dată prin $y = F(x, t)$ care este o curbă vagă. Se poate pune problema determinării ariei mărginite de axa Ox și curba C_t. În acest scop se alege o partiție $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ și numerele $\xi_i (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$. Probabilitatea ca aria cuprinsă între Ox și linia poligonală în scară, definită de partiția dată, să fie mai mică decît t, este valoarea în t a funcției $g_1 * g_2 * \ldots * g_m$, adică produsul de convoluție al repartițiilor

$$g_i(t) = F\left(\xi_i, \frac{t}{x_i - x_{i-1}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Se poate arăta că dacă $F(x, t)$ este de tip normal cu media $m(x)$ și abaterea medie pătratică $\sigma(x)$, atunci repartiția ariei amintite este normală cu valoarea medie $\sum_i m(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ iar abaterea medie patratică

$$\sqrt{\sum_i \sigma^2(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})^2} \leqslant \sqrt{\sum_i \sigma^2(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})} \cdot \sqrt{\max(x_i - x_{i-1})}$$

Dacă $\max (x_i - x_{i-1}) \to 0$, ariile converg către o funcție de repartiție care ia respectiv valoarea 0 sau 1 după cum t este $\leqslant$ sau $> \int_a^b m(x)\,dx$ cu condiția ca $m(x)$ și $\sigma^2(x)$ să fie integrabile Riemann. Prin urmare aria domeniului mărginit de Ox și curba vagă, sau integrala funcției aleatoare, este rigidă.

1.2. SPAȚIILE METRICE STATISTICE INTRODUSE DE K. MENGER ȘI A. WALD

K. Menger în 1942 [167] introduce o concepție axiomatică generală privind abordarea statistică a structurii de spațiu metric. Această concepție are meritul de a conține în sine structura metrică obișnuită a lui Fréchet și toate spațiile particulare deja utilizate în multe probleme ale statisticii și teoriei probabilităților cum au fost: spațiul lui Wiener, spațiile lui Doob sau spațiile lui Green. K. Menger creează modelul său independent de aceste cazuri particulare a căror încadrare unitară în acest model se realizează datorită diverselor extensii propuse de O. Onicescu [198].

Desigur că axiomatica lui Menger este mult mai generală decît sistemul de proprietăți puse în evidență la cazurile particulare de spații metrice statistice considerate ca existente la acea dată. De altfel Menger este primul care reușește să formuleze inegalitatea triunghiului într-o formă foarte generală cu semnificație fenomenologică interesantă și cu o soluționare ingenioasă. În acest scop Menger introduce t-normele caracterizate prin proprietățile menționate în capitolul I, § 2.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 3.1.3. [167] Se numește *spațiu metric statistic* orice triplet (S, Π, T) unde S este o mulțime arbitrară, Π o aplicație definită pe $S \times S$ cu valori în $\mathcal{R}'_+$, T o t-normă în sensul precizat mai sus și care verifică condițiile

1) $\Pi(0; p, q) = 1$,
2) dacă $p \neq q$, atunci $\Pi(0; p, q) < 1$,
3) $\Pi(x; p, q) = \Pi(x; q, p)$,
4) $T(\Pi(x; p, q), \Pi(y; q, r)) \leqslant \Pi(x + y; p, r)$.

Aici $\mathcal{R}'_+$ este mulțimea funcțiilor nedescrescătoare, continue la dreapta, definite pe $[0, \infty]$ și $\lim_{x \to \infty} \Pi(x) = 1$.

K. Menger sugerează dezvoltarea unei geometrii corespunzătoare și în special se ocupă de problema relației „între" punctele spațiului luînd prin definiție că q se află între p și r (notînd prin pqr) dacă $T(1 - \Pi(x; p, q), 1 - \Pi(y; q, r)) \leqslant 1 - \Pi(x + y; p, r)$ și arată că incompatibilitatea relațiilor pqr și prq, pentru $q \neq r$, din cazul metricilor obișnuite poate să nu mai aibă loc în cazul statistic. Deși el sugerează aplicații ale acestor metrici în teoria măsurătorilor legate de microcosmos, macrocosmos sau din psihologie, prezența unei t-norme T în inegalitatea 4) precum și comportarea puțin stranie a relației „între", cînd nu se impun restricții asupra metricii statistice, a fost un alt motiv care l-a determinat pe Wald să introducă o altă inegalitate a triunghiului și anume

Definiția 3.1.4. Se numește spațiu metric statistic în sensul lui Wald un triplet $(S, \mathcal{F}, *)$, $\mathcal{F} : S \times S \to \mathcal{R}_+^+$ pentru care, dacă notăm $\mathcal{F}(p, q) = F_{pq}$, sînt verificate condițiile:

I) $F_{pp}(x) = 1$ pentru orice $x > 0$,

II) $F_{pq}(x) = F_{qp}(x)$ pentru orice $p, q \in S$, $x \in \mathbf{R}$,

III) $F_{pr}(x) \geqslant (F_{pq} * F_{qr})(x) = \int_0^x F_{pq}(x - y)\, dF_{qr}(y)$.

Rezultă că inegalitatea triunghiului sub forma dată de Wald, cu ajutorul produsului de convoluție al repartițiilor, are ca interpretare că probabilitatea că distanța dintre p și r este mai mică decît x, nu este mai mică decît probabilitatea ca suma distanțelor de la p la q și de la q la r, privite ca variabile aleatoare independente, să fie mai mică decît x.

Pentru definirea relației „între" Wald consideră că $p \neq r$ dacă există $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$, astfel încît $F_{pr}(x) < 1$ și că q se află „între" p și r dacă $p \neq q \neq r \neq p$ și avem că $(F_{pq} * F_{qr})(x) = F_{pr}(x)$. El arată că relația „între" astfel definită are aceleași proprietăți cu relația „între" din cazul spațiilor metrice obișnuite (S, d), unde se ia ca relație de definiție $d(p, q) + d(q, r) = d(p, r)$, pentru q între p și r.

În [223] se prezintă condiții ce reduc teoria convexității în spații de tip Wald la convexitatea într-o metrică obișnuită ce se poate defini pe asemenea spații. J. F. C. Kingman [143] reduce teoria convexității și a relațiilor „între" în spații de tip Wald, la teoria cunoscută din spații metrice obișnuite, reușind să arate că pe orice spațiu S de tip Wald, dacă punem $d(p, q) = -\log \int_0^\infty e^{-x}\, dF_{pq}(x)$, atunci d este o metrică pe S iar convexitatea și structura uniformă probabilistă ce se poate defini pe $(S, \mathcal{F})$ sînt exact cele din (S, d).

Reîntorcîndu-se la concepția mai generală, propusă de Menger cu ajutorul t-normelor, B. Schweizer și A. Sklar elaborează o teorie probabilistă cuprinzătoare și cu aplicații importante.

Scanned with OKEN Scanner

1.3.1. PM-spații. Din prezentările de pînă acum deducem că acceptarea de către Menger în lucrările sale ulterioare a inegalității triunghiului sub forma dată de Wald a condus la o mai slabă preocupare în găsirea unor exemple edificatoare de spații metrice statistice și mai ales de t-norme. Găsirea de exemple de spații Wald era și ea implicit împiedicată de justificarea dată ulterior de J. F. C. Kingman [143] că structura impusă de Wald era prea similară spațiilor metrice obișnuite în sensul că există o metrică echivalentă cu cea a lui Wald.

În asemenea condiții începe în 1955 colaborarea dintre B. Schweizer și A. Sklar care propun o nouă inegalitate a triunghiului introducînd

Definiția 3.1.5. Se numește PM-spațiu o pereche ordonată $(S, \mathcal{F})$ unde S este o mulțime abstractă iar $\mathcal{F}: S \times S \to \mathcal{R}_v$ cu proprietățile

I) $F_{pq}(x) = 1$, pentru orice $x > 0$, dacă și numai dacă $p = q$,

II) $F_{pq}(0) = 0$,

III) $F_{pq} = F_{qp}$,

IV) dacă $F_{pq}(x) = 1$ și $F_{qp}(y) = 1$ atunci $F_{pr}(x + y) = 1$.

Inițial [233] acestea au fost numite SM-spații însă ulterior s-a unificat denumirea sub forma de PM-spații [241]. Evident că orice spațiu metric este un PM-spațiu cu $F_{pq}(x) = H(x - d(p, q))$, F_{pq} avînd interpretarea cunoscută de la spațiile lui Wald de a reprezenta probabilitatea ca distanța dintre p și q să fie mai mică decît x. Dacă există $d: S \times S \to [0, \infty)$ astfel ca $F_{pq}(x) = H(x - d(p, q))$ pentru orice $p, q \in S$ și $x \in \mathbf{R}$ atunci axiomele I) — IV) asigură că d este o metrică pe S adică axioma IV) garantează includerea teoriei spațiilor metrice în cea a PM-spațiilor. Mai mult, inegalitatea triunghiului formulată de Menger implică, datorită condiției $T(1, 1) = 1$, că are loc axioma IV) din definiția 3.1.5. De asemenea din proprietățile convoluției rezultă că și inegalitatea lui Wald implică axioma IV) de mai sus.

De altfel, într-un mod destul de asemănător cazului clasic, în PM-spații se poate introduce conceptul de vecinătate în care sens amintim

Definiția 3.1.6. Fiind dat un PM-spațiu $(S, \mathcal{F})$ prin (ε, λ) — vecinătate, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, a unui punct $p \in S$ se înțelege mulțimea

$$V_p(\varepsilon, \lambda) = \{q : F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}.$$

Deci (ε, λ) — vecinătatea lui p este formată din punctele $q \in S$ pentru care probabilitatea ca distanța dintre p și q să fie mai mică decît ε este mai mare decît $1 - \lambda$. Evident că o astfel de vecinătate depinde de doi parametri și avem

Lema 3.1.2. *Dacă* $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ *și* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, *atunci* $V_p(\varepsilon_1, \lambda_1) \subseteq V_p(\varepsilon_2, \lambda_2)$.

În adevăr dacă $q \in V_p(\varepsilon_1, \lambda_1)$ atunci $F_{pq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1$ și cum $F_{pq}(\varepsilon_2) \geqslant F_{pq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1 \geqslant 1 - \lambda_2$ avem că $q \in V_p(\varepsilon_2, \lambda_2)$.

Existența spațiilor metrice nearhimediene (ultrametrice), cu o geometrie și proprietăți interesante și utile în aplicații, a sugerat trecerea la modelul probabilist [105] prin

Definiția 3.1.7. Spunem că avem un PM-spațiu nearhimedian dacă în definiția 3.1.5. se înlocuiește axioma IV) prin

IV') dacă $F_{pq}(x) = 1$ și $F_{qr}(y) = 1$ atunci $F_{pr}(\max(x, y)) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Evident că dacă d este o metrică nearhimediană, adică o metrică în care axioma triunghiului se înlocuie cu axioma: $d(p, r) \leqslant \max\{d(p, q), d(q, r)\}$, atunci luînd $F_{pq}(x) = H_0(x - d(p, q))$ rezultă un PM-spațiu nearhimedian.

În general, pot exista PM-spații în care $F_{pq}(x) = 1$ nu este adevărată pentru $p \neq q$ oricare ar fi x finit și în acest caz axioma IV) se verifică prin absență. Acest inconvenient i-a condus pe Schweizer și Sklar la slăbirea axiomei IV) revenind la t-norme printr-o ușoară întărire, deci o particularizare, a condițiilor lui Menger, după cum am amintit în capitolul I, § 2.

1.3.2. Spații Menger și spații Wald. Următoarele leme justifică necesitatea întăririi unor condiții din t-normele lui Menger și deci calea propusă de Schweizer și Sklar.

Să precizăm mai întîi că o inegalitate a triunghiului se zice *universală* într-un PM-spațiu dacă ea este verificată pentru orice triplete de puncte din spațiu, distincte sau nu. Să observăm că $T(x, y) = \text{Max}\ (x, y)$ este o t-normă în sensul lui Menger însă avem

Lema 3.1.3. *Dacă un PM-spațiu S conține cel puțin două puncte distincte, atunci inegalitatea triunghiului sub forma lui Menger nu poate fi verificată universal dacă* $T = \text{Max}$.

Demonstrație. Fie $p, q \in S$, $p \neq q$ și $x, y \in \mathbf{R}$, $0 < y < x$. Dacă inegalitatea triunghiului cu $T = \text{Max}$ este verificată universal atunci avem că $F_{pq}(x) = \text{Max}\,(F_{pq}(x - y),\ F_{qq}(y)) = 1$. Cum x poate fi orice număr real pozitiv, ar rezulta că $F_{pq}(x) = 1$ pentru orice $x > 0$ și din axioma I) ar însemna că $p = q$ ceea ce contrazice alegerea lui $p \neq q$.

Slăbirea condiției $T(a, 1) > 0$ pentru $a > 0$ și $T(1, 1) = 1$ este sugerată de

Lema 3.1.4. *Fie* $(S, \mathcal{F})$ *un PM-spațiu propriu în care este verificată universal axioma triunghiului pentru un T arbitrar, atunci avem:*

i) *există un număr* $a \in (0, 1)$ *astfel încît* $T(a, 1) \leqslant a$,

ii) *dacă T este continuă atunci pentru orice* $x > 0$ *avem* $T(F_{pq}(x), 1) \leqslant F_{pq}(x)$.

Demonstrație. i) Dacă $(S, \mathcal{F})$ este un PM-spațiu care nu este spațiu metric obișnuit, atunci există $p, q \in S$, nu neapărat distincte, pentru care $F_{pq}(x)$ ia și alte valori în afară de 0 și 1. Din continuitatea la stînga a lui F_{pq} rezultă că există un interval $(x, y) \in \mathbf{R}$ pe care $0 < F_{pq} < 1$. Fie $T(a, 1) = a + h(a)$ unde $h(a) > 0$ pentru $0 < a < 1$ și fie $z \in (x, y)$ iar $t > 0$, atunci avem

$$F_{pq}(z + t) \geqslant T(F_{pq}(z), F_{qq}(t)) = T(F_{pq}(z), 1) = F_{pq}(z) + h(F_{pq}(z))$$

Luînd $t \to 0 +$ obținem

$$F_{pq}(z+) \geqslant F_{pq}(z) + h(F_{pq}(z)) > F_{pq}(z)$$

adică F_{pq} ar fi discontinuă în z și deci în orice punct din (x, y). Această concluzie contrazice proprietatea că F_{pq} este monotonă avînd o mulțime cel mult numărabilă de discontinuități.

ii) Fie $p, q \in S$ și $x > 0$ fixat. Să alegem un y astfel ca $0 < y < x$ și să observăm că avem

$$F_{pq}(x) \geqslant T(F_{pq}(x - y),\ F_{qq}(y)) = T(F_{pq}(x - y),\ 1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident că dacă d este o metrică nearhimediană, adică o metrică în care axioma triunghiului se înlocuie cu axioma: $d(p, r) \leqslant \max\{d(p, q), d(q, r)\}$, atunci luînd $F_{pq}(x) = H_0(x - d(p, q))$ rezultă un PM-spațiu nearhimedian.

În general, pot exista PM-spații în care $F_{pq}(x) = 1$ nu este adevărată pentru $p \neq q$ oricare ar fi x finit și în acest caz axioma IV) se verifică prin absență. Acest inconvenient i-a condus pe Schweizer și Sklar la slăbirea axiomei IV) revenind la t-norme printr-o ușoară întărire, deci o particularizare, a condițiilor lui Menger, după cum am amintit în capitolul I, § 2.

1.3.2. Spații Menger și spații Wald. Următoarele leme justifică necesitatea întăririi unor condiții din t-normele lui Menger și deci calea propusă de Schweizer și Sklar.

Să precizăm mai întîi că o inegalitate a triunghiului se zice *universală* într-un PM-spațiu dacă ea este verificată pentru orice triplete de puncte din spațiu, distincte sau nu. Să observăm că $T(x, y) = \text{Max}\ (x, y)$ este o t-normă în sensul lui Menger însă avem

Lema 3.1.3. *Dacă un PM-spațiu S conține cel puțin două puncte distincte, atunci inegalitatea triunghiului sub forma lui Menger nu poate fi verificată universal dacă* $T = \text{Max}$.

Demonstrație. Fie $p, q \in S$, $p \neq q$ și $x, y \in \mathbf{R}$, $0 < y < x$. Dacă inegalitatea triunghiului cu $T = \text{Max}$ este verificată universal atunci avem că $F_{pq}(x) = \text{Max}\,(F_{pq}(x - y), F_{qq}(y)) = 1$. Cum x poate fi orice număr real pozitiv, ar rezulta că $F_{pq}(x) = 1$ pentru orice $x > 0$ și din axioma I) ar însemna că $p = q$ ceea ce contrazice alegerea lui $p \neq q$.

Slăbirea condiției $T(a, 1) > 0$ pentru $a > 0$ și $T(1, 1) = 1$ este sugerată de

Lema 3.1.4. *Fie* $(S, \mathcal{F})$ *un PM-spațiu propriu în care este verificată universal axioma triunghiului pentru un T arbitrar, atunci avem:*

i) *există un număr* $a \in (0, 1)$ *astfel încît* $T(a, 1) \leqslant a$,

ii) *dacă T este continuă atunci pentru orice* $x > 0$ *avem* $T(F_{pq}(x), 1) \leqslant F_{pq}(x)$.

Demonstrație. i) Dacă $(S, \mathcal{F})$ este un PM-spațiu care nu este spațiu metric obișnuit, atunci există $p, q \in S$, nu neapărat distincte, pentru care $F_{pq}(x)$ ia și alte valori în afară de 0 și 1. Din continuitatea la stînga a lui F_{pq} rezultă că există un interval $(x, y) \in \mathbf{R}$ pe care $0 < F_{pq} < 1$. Fie $T(a, 1) = a + h(a)$ unde $h(a) > 0$ pentru $0 < a < 1$ și fie $z \in (x, y)$ iar $t > 0$, atunci avem

$$F_{pq}(z + t) \geqslant T(F_{pq}(z), F_{qq}(t)) = T(F_{pq}(z), 1) = F_{pq}(z) + h(F_{pq}(z))$$

Luînd $t \to 0+$ obținem

$$F_{pq}(z+) \geqslant F_{p1}(z) + h(F_{pq}(z)) > F_{pq}(z)$$

adică F_{pq} ar fi discontinuă în z și deci în orice punct din (x, y). Această concluzie contrazice proprietatea că F_{pq} este monotonă avînd o mulțime cel mult numărabilă de discontinuități.

ii) Fie $p, q \in S$ și $x > 0$ fixat. Să alegem un y astfel ca $0 < y < x$ și să observăm că avem

$$F_{pq}(x) \geqslant T(F_{pq}(x - y), F_{qq}(y)) = T(F_{pq}(x - y), 1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd $y \to 0+$ se obține $F_{pq}(x) \geqslant \lim_{y\to 0+} T(F_{pq}(x-y), 1)$ iar din continuitatea lui T rezultă că $\lim_{y\to 0+} T(F_{pq}(x-y), 1) = T(\lim_{y\to 0+} F_{pq}(x-y), 1)$ în timp ce continuitatea la stînga a lui F_{pq} ne dă $\lim_{y\to 0+} F_{pq}(x-y) = F_{pq}(x)$ ceea ce demonstrează ii).

Această lemă împreună cu observația că cîteva din t-normele cunoscute verifică chiar condiția $T(a, 1) = a$, $a \in (0, 1)$ au sugerat înlocuirea condiției amintite prin

1') $T(a, 1) = a$, $T(0, 0) = 0$

care o implică pe cea dată de Menger. În plus s-a adăugat și proprietatea de asociativitate pentru T adică $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$ pentru orice $a, b, c \in [0, 1]$ care permite o extindere poligonală a inegalității triunghiului și existența unor teoreme de reprezentare a t-normelor (vezi cap. I).

Considerînd t-normele ca funcții asociative, comutative, nedescrescătoare în raport cu fiecare variabilă pe $[0, 1]$ și verificînd condiția 1') (adică în sensul dat în [233], sens care va fi luat peste tot în cele ce urmează), vom avea

Definiția 3.1.8. Se numește *spațiu Menger* (după terminologia lui Schweizer și Sklar) orice PM-spațiu în care inegalitatea

(IV_m) $F_{pr}(x + y) \geqslant T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$

este verificată universal și T este o t-normă în sensul acceptat mai sus.

Dacă inegalitatea

(IV_w) $F_{pr}(x) \geqslant (F_{pq} * F_{qr})(x)$, pentru orice $x > 0$

este verificată universal spunem că avem un *spațiu Wald*.

Un PM-spațiu în care are loc axioma

($\mathrm{IV}_{m.n}$) $F_{pr}(\max(x, y)) \geqslant T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$

se numește *spațiu Menger nearhimedian*.

Verificarea condiției de spațiu Menger este suficientă numai pentru triplete de puncte distincte după cum rezultă din

Lema 3.1.5. *Dacă p, q, r este un triplet de puncte nedistincte atunci* IV_m *are loc pentru aceste puncte oricare ar fi t-norma T* (în sensul acceptat mai sus [233]).

În adevăr, s-a văzut în capitolul I, § 2 că dacă luăm pentru t-norme definiția dată în [233] atunci cea mai tare t-normă este $T = \mathrm{Min}$ și cea mai slabă este T_w. Este deci suficientă verificarea inegalității IV_m pentru $T = \mathrm{Min}$. Vom avea că pentru $p = r$, $F_{pr} = H_0$ și IV_m este imediată iar dacă $p = q \neq r$ atunci pentru orice $x, y >$ o avem

$$\mathrm{Min}\,(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) = \mathrm{Min}\,(H_0(x), F_{qr}(y)) \leqslant F_{qr}(y) \leqslant F_{qr}(x+y) =$$

$$= F_{pr}(x+y)$$

Observația 1. Lema 3.1.3 rezultă ușor în cazul spațiilor Menger nearhimediene din observația că înlocuirea în ($\mathrm{IV}_{m.n}$) dă $F_{pq}(x) \geqslant \mathrm{Max}\,(F_{pq}(x), F_{qq}(y)) = 1$. De asemenea lema 3.1.4 are loc fără ipoteza de continuitate asupra lui T și anume avem că pentru orice $x > 0$, există y, $0 < y < x$ astfel încît

$$T(F_{pq}(x), 1) = T(F_{pq}(x), F_{qq}(y)) \leqslant F_{pq}(\max(x, y)) = F_{pq}(x)$$

adică ii) care implică și i).

Scanned with OKEN Scanner

Lema 3.1.5 în cazul spațiilor Menger nearhimediene rezultă din următorul raționament pentru $T = \text{Min}$ și $p = r$

$$\text{Min}\,(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) = \text{Min}\,(F_{pq}(x), F_{qp}(y)) \leqslant F_{pp}(\max(x, y)) = H_0(\max(x, y))$$

iar cînd $p = q \neq r$ avem

$$\text{Min}\,(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) = \text{Min}\,(F_{pp}(x), F_{pr}(y)) = F_{pr}(y) \leqslant F_{pr}(\max\,(x, y))$$

De asemenea și cu privire la diferitele tipuri de discernabilitate se pot da unele rezultate [107] similare cu cele din [241] observînd că dacă notăm cu $t_{pq} = \sup\,\{x, F_{pq}(x) = 0\}$ atunci vom spune că p și q sînt „poate indiscernabile" dacă $t_{pq} = 0$ și $F_{pq}(0+) > 0$. Notînd cu γ această relație se arată că ea este simetrică și reflexivă în PM-spațiile nearhimediene.

Propoziția 3.1.6. *Dacă* $(S, \mathcal{F}, T)$, *este un spațiu Menger nearhimedian pentru care* T *are proprietatea că* $T(x, y) > 0$ *pentru* $x > 0, y > 0$, *atunci* γ *este o relație de echivalență.*

Demonstrație. Dacă $p\,\gamma\,q$ și $q\,\gamma\,r$ atunci rezultă că $F_{pq}(0+) > 0$ și $F_{qr}(0+) > 0$ iar pentru $0 < y < x$ obținem

$$F_{pr}(x) = F_{pr}(\max(x, y)) \geqslant T(F_{pq}(x), F_{qr}(y)) \geqslant T(F_{pq}(0+), F_{qr}(0+))$$

care implică $F_{pr}(0+) \geqslant T(F_{pq}(0+), F_{qr}(0+)) > 0$ și deci $p\,\gamma\,r$.

Propoziția 3.1.7. *Fie* $d(p, q) = t_{pq}$ *și* T *cu proprietățile din propoziția 3.1.6, atunci* (S, d) *este un spațiu pseudometric care este spațiu metric dacă și numai dacă orice pereche de puncte distincte* $p, q \in S$ *are proprietatea că* $t_{pq} > 0$ (adică sînt „cert discernabile").

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ atunci $F_{pr}(\max\,(t_{pq} + \varepsilon, t_{qr} + \varepsilon)) \geqslant T(F_{pq}(t_{pq} + \varepsilon), F_{qr}(t_{qr} + \varepsilon)) > 0$ din care deducem că $t_{pr} \leqslant \max\,(t_{pq} + \varepsilon, t_{qr} + \varepsilon)$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Deci putem scrie că $t_{pr} \leqslant \max\,(t_{pq}, t_{qr})$ și cum $t_{pp} = 0$ și $t_{pq} = t_{qp}$ prima parte este demonstrată. Pentru partea a doua observăm că dacă $p, q \in S$, $p \neq q$, sînt cert discernabile atunci $t_{pq} > 0$ și reciproc.

Corolar. *În orice spațiu metric nearhimedian tripletul* $(S, \mathcal{F}, T)$ *cu proprietățile din propoziția 3.1.7 relația: „*$p\,\delta\,q$ *dacă și numai dacă* $t_{pq} = 0$", *este o relație de echivalență.*

Cu privire la conexiunea dintre spațiile Menger și spațiile Wald avem

Teorema 3.1.1. *Orice spațiu Wald este un spațiu Menger pentru* $T = \text{Prod}$ [233], [124].

Afirmația reciprocă este mult mai slabă și anume avem

Teorema 3.1.2. *Dacă într-un* PM*-spațiu* $(S, \mathcal{F})$ *este verificată* IV_m, *relativ la* $T = \text{Max}$ *pentru orice triplete de puncte distincte, atunci acesta este un spațiu de tip Wald* [233], [124].

Observația 2. Această teoremă este numai parțial o reciprocă a teoremei 3.1.1 pentru că $T = \text{Max}$ (care nu este t-normă în sensul acceptat mai sus) nu poate fi slăbită la $T = \text{Min}$ deci cu atît mai mult nu poate fi $T = \text{Prod}$ și o reciprocă propriu-zisă ar fi falsă. De altfel ne vom convinge și prin exemple simple că există spații Menger care nu sînt spații Wald.

Teorema 3.1.2 poate fi generalizată [36] în sensul că dacă luăm

$$T_M(a, b) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } a = 0 \text{ sau } b = 0, \\ [\text{Max}\,(a, b)]^2 \text{ dacă } 0 < a \leqslant 1 \text{ și } 0 < b \leqslant 1 \end{cases}$$

atunci T_M este mai slabă decît $T = \text{Max}$ fără a fi comparabilă cu $T = \text{Min}$ și avem

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.1.3. *Dacă* $(S, \mathcal{F})$ *este un PM-spațiu în care* IV_m *are loc pentru* $T = T_M$ *relativ la orice triplete de puncte distincte din* S *atunci* $(S, \mathcal{F})$ *este un spațiu Wald.*

Demonstrație. Fie $p \neq q \neq r \neq p$ și $x_1 = \max\{x: F_{pq}(x) = 0\}$ și $x_2 = \max\{x: F(x_{qr}) = 0\}$, atunci

$$\int_{-\infty}^{x_1} F_{qr}(x-y)\, dF_{pq}(y) = \int_{x-x_2}^{\infty} F_{qr}(x-y)\, dF_{pq}(y) = 0$$

și dacă $x > x_1 + x_2$ obținem

$$(F_{pq} * F_{qr})(x) = \int_{x_1}^{x-x_2} F_{qr}(x-y)\, dF_{pq}(y) \leqslant F_{qr}(x-x_1)\, F_{pq}(x-x_2)$$

Dacă $x \leqslant x_1 + x_2$, atunci $(F_{pq} * F_{qr})(x) = 0 \leqslant F_{pr}(x)$. Deci presupunînd $x > x_1 + x_2$, $F_{pq}(x-x_2) > 0$ avem că există un $c > 0$ astfel că dacă $0 < t < c$ atunci

$$F_{pq}(x-x_2-t) > 0 \text{ și } F_{qr}(x_2+t) > 0$$

de unde deducem că

$$F_{pr}(x) \geqslant [\mathrm{Max}\{F_{pq}(x-x_2-t),\, F_{qr}(x_2+t)\}]^2.$$

Din faptul că F_{pq} este continuă la stînga rezultă că

$$F_{pr}(x) \geqslant [F_{pq}(x-x_2)]^2$$

și pe o cale similară

$$F_{pr}(x) \geqslant [F_{qr}(x-x_1)]^2$$

Deducem astfel că

$$F_{pr}(x) \geqslant F_{pq}(x-x_2)\, F_{qr}(x-x_1) \geqslant (F_{pq} * F_{qr})(x)$$

Teorema 3.1.3 nu mai poate fi generalizată prin schimbarea lui T_M cu o t-normă în, sensul lui Menger, mai slabă ca T_M pentru că avem

Teorema 3.1.4. [36] *Dacă* T' *este o* t*-normă în sensul lui Menger mai slabă ca* T_M *atunci există un PM-spațiu* $(S, \mathcal{F})$ *care verifică* IV_m *pentru* $T = T'$ *și pentru orice triplete de puncte distincte din* S *dar pentru care* $(S, \mathcal{F})$ *nu este un spațiu Wald.*

De asemenea nici teorema 3.1.1 nu poate fi generalizată pentru un T mai tare ca Prod sau pentru o funcție necomparabilă cu $T = \mathrm{Prod}$ căci avem

Teorema 3.1.5. *Există un spațiu Wald* $(S, \mathcal{F})$ *pentru care* $T = \mathrm{Prod}$ *este cea mai tare* t*-normă* T *pentru care* $(S, \mathcal{F}, T)$ *este un spațiu Menger.*

Demonstrație. Fie $S = (a, b, n)$ unde $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$ și $n \in \{1, 2, 3\}$ și se definește F_{pq} pentru $p \neq (a, b, 1)$, $q \neq (a, b, 2)$ prin $F_{pq}(x) = H_1(x)$ iar pentru $p = (a, b, 1)$, $q = (a, b, 2)$ și $r = (a, b, 3)$ din S

$$F_{pq}(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 1/2, \\ a, \text{ dacă } 1/2 < x \leqslant 1, \\ 1, \text{ dacă } 1 < x, \end{cases} \qquad F_{qr}(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 1/2, \\ b, \text{ dacă } 1/2 < x \leqslant 1, \\ 1, \text{ dacă } 1 < x, \end{cases}$$

$$F_{pr}(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 1, \\ ab, \text{ dacă } 1 < x \leqslant 3/2, \\ 1, \text{ dacă } 3/2 < x. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se știe [282] că $T = \mathrm{Prod}$ este cea mai tare t-normă T pentru care $(S, \mathcal{F}, T)$ este un spațiu Menger.

Să arătăm că $(S, \mathcal{F})$ este un spațiu Wald. În acest scop vom considera numai triplete de puncte distincte și anume mai întîi $p = (a, b, 1)$, $q = (a, b, 2)$ și $r = (a, b, 3)$. Să observăm că dacă $U, V \in \mathcal{K}_r^+$ atunci

$$(U * V)(x) = \int_0^x U(x-y)\,\mathrm{d}V(y) \leqslant U(x)\int_0^x 1\cdot \mathrm{d}V(y) = U(x)\,V(x)$$

iar $F_{pq} \geqslant F_{pr}F_{qr}$ și $F_{qr} \geqslant F_{qp}F_{pr}$ rămînînd să arătăm numai că $F_{pr}(x) \geqslant (F_{pq} * F_{qr})(x)$ pentru orice x. Avem că

$$(F_{pq} * F_{qr})(x) = \left.\begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 1, \\ ab, \text{ dacă } 1 < x \leqslant 3/2, \\ a+b-ab, \text{ dacă } 3/2 < x \leqslant 2, \\ 1, \text{ dacă } 2 < x, \end{cases}\right\} \leqslant F_{rr}(x) \text{ pentru orice } x$$

Să presupunem acum că p, q și r aparțin lui S dar nu coincid cu elemente din primele două tipuri adică sau p și r sau q și r nu sînt de această formă. Fie p de forma $(a, b, 1)$ iar $q \neq (a, b, 2)$ și $r \neq (a, b, 1)$, atunci avem $F_{pr} * F_{rq} = F_{pr} * H_1 \leqslant H_1 F_{pr} \leqslant H_1 = F_{pq}$ și similar $F_{qp} * F_{pr} \leqslant F_{qr}$. De asemenea $(F_{pq} * F_{qr})(x) = (H_1 * H_1)(x) = H_2(x) \leqslant F_{pr}(x)$ pentru orice x adică $(S, \mathcal{F})$ este un spațiu Wald și teorema este demonstrată.

Să ne ocupăm de unele elemente simple de topologie probabilistă utile în cele ce urmează. Să observăm că sistemul (ε, λ) — vecinătăți dat în definiția 3.1.6 induce o topologie și anume avem

Teorema 3.1.6. *Dacă $(S, \mathcal{F}, T)$ este un spațiu Menger cu T continuă atunci familia (ε, λ) — vecinătăților $\{V_p\}_{p \in S} = \mathcal{W}$ induce o topologie de spațiu Hausdorff pe S.*

Demonstrație. Vom arăta că sînt îndeplinite axiomele din definiția topologiilor Hausdorff cu ajutorul familiei de vecinătăți.

a) Pentru orice $p \in S$ există cel puțin o (ε, λ) — vecinătate $V_p \in \mathcal{W}$ a lui p, orice (ε, λ) — vecinătate a lui p conține pe p și orice $U \supseteq V_p$ poate fi considerată o (ε, λ) — vecinătate pentru p.

În adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ avem că $F_{pp}(\varepsilon) = 1$ și pentru $q \in U$, $q \notin V_p$ avem $q \neq p$ deci există ε' astfel ca $F_{pq}(\varepsilon') \neq 1$ sau ε'' și λ'' astfel încît $F_{pq}(\varepsilon'') > 1 - \lambda''$.

b) Pentru orice $p \in S$ și V_p, $U_p \in \mathcal{W}$ există $W_p \in \mathcal{W}$ astfel încît $W_p \subseteq U_p \cap V_p$ deoarece dacă $V_p = \{q: F_{pq}(\varepsilon_1) > 1 - \lambda_1\}$, $U_p = \{q: F_{pq}(\varepsilon_2) > 1 - \lambda_2\}$ atunci $W_p = \{q: F_{pq}(\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}) > 1 - \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ are proprietatea că $p \in W_p$ și $W_p \subseteq V_p$ căci $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leqslant \varepsilon_1$ și $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leqslant \varepsilon_2$ iar din lema 3.1.2 rezultă că $W_p \subseteq U_p$ adică $W_p \subseteq V_p \cap U_p$.

c) Dacă V_p este o (ε, λ) — vecinătate a lui p și $q \in V_p$ atunci există o (ε, λ) — vecinătate U_q a lui q astfel că $U_q \subseteq V_p$.

În adevăr dacă $V_p = \{r: F_{pr}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$ rezultă că $F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ pentru că $q \in V_p$. Din continuitatea la stînga a lui F_{pq} în $x = \varepsilon$ rezultă că există $\varepsilon' < \varepsilon$ și $\lambda' < \lambda$ astfel încît să avem $F_{pq}(\varepsilon') > 1 - \lambda' > 1 - \lambda$.

Să notăm cu $U_q = \{r: F_{qr}(\varepsilon'') > 1 - \lambda''\}$ unde $0 < \varepsilon'' < \varepsilon - \varepsilon'$ iar λ'' să-l alegem astfel încît $T(1 - \lambda', 1 - \lambda'') > 1 - \lambda$ ceea ce este posibil pentru că T este continuă, $T(x, 1) = x$ și $1 - \lambda' > 1 - \lambda$. Fie $s \in U_q$ adică

Scanned with OKEN Scanner

$F_{qs}(\varepsilon'') > 1 - \lambda''$, atunci avem $F_{ps}(\varepsilon) > T(F_{pq}(\varepsilon'), F_{qs}(\varepsilon - \varepsilon')) \geqslant T(F_{pq}(\varepsilon'), F_{qs}(\varepsilon'')) \geqslant T(1 - \lambda', 1 - \lambda'') > 1 - \lambda$ ceea ce este echivalent cu faptul că $U_p \subseteq V_p$.

d) Pentru orice $p \neq q$ există V_p și V_q, $p \in V_p$, $q \in V_q$ și $V_p \cap V_q = \varnothing$.

În adevăr, dacă $p \neq q$ rezultă că există $x > 0$ și $a \in [0, 1)$ astfel că $F_{pq}(x) = a$. Fie $V_p = \left\{r: F_{pr}\left(\frac{x}{2}\right) > b\right\}$ și $V_q = \left\{r: F_{qr}\left(\frac{x}{2}\right) > b\right\}$ unde b se alege astfel încît $b \in (0, 1)$ și $T(b, b) > a$ a cărui existență rezultă din continuitatea lui T și din proprietatea că $T(1, 1) = 1$. Dacă presupunem că există $s \in V_p \cap V_q$ atunci ar rezulta că $a = F_{pq}(x) \geqslant T\left(F_{ps}\left(\frac{x}{2}\right), F_{qs}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geqslant$ $\geqslant T(b, b) > a$ adică o contradicție și teorema este demonstrată.

Un rezultat mai general este dat de

Teorema 3.1.7. [234] *Dacă* $(S, \mathcal{F})$ *este un PM-spațiu în care* IV_m *este verificată față de o funcție* $T: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ *nedescrescătoare în raport cu fiecare variabilă și cu* $\sup_{x<1} T(x, x) = 1$ *atunci familia de părți*

$$\mathcal{U} = \{U(\varepsilon, \lambda): \varepsilon > 0, \lambda > 0\}$$

unde $U(\varepsilon, \lambda) = \{(p, q): p, q \in S \text{ și } F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$ *definește o bază de uniformități Hausdorff pe* $S \times S$.

Corolar. [234] *Într-un PM-spațiu cu proprietățile din teorema* 3.1.7 *avem că familia de părți* $V_p(\varepsilon, \lambda) = \{q: F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$ *definește o bază de vecinătăți pentru o topologie Hausdorff pe* S. *Mai mult această topologie este metrizabilă.*

Aceste rezultate au condus la ideea definirii altor topologii naturale nemetrizabile pe *PM*-spații care vor fi abordate în § 3.

În cazul spațiilor Menger nearhimediene vom avea rezultate similare și anume

Teorema 3.1.8. *Dacă* $(S, \mathcal{F}, T)$ *este un spațiu Menger nearhimedian cu* $T = \mathrm{Min}$ *atunci familia* $\mathcal{U}$, *de părți definite în teorema* 3.1.7, *definește o bază de uniformități Hausdorff nearhimediene.*

Demonstrație. Se știe [177] că o uniformitate pe S se numește nearhimediană dacă pentru orice $U \in \mathcal{U}$ avem că $U \circ U = U$. Să observăm că avem:

1) dacă $D = \{(p, p): p \in S\}$ și $U(\varepsilon, \lambda)$ este un element arbitrar din $\mathcal{U}$ atunci din faptul că pentru orice $p \in S$, $F_{pp}(\varepsilon) = 1$ rezultă că $(p, p) \in U(\varepsilon, \lambda)$ și deci $D \subseteq U(\varepsilon, \lambda)$.

2) Pentru orice $U(\varepsilon, \lambda)$, $U(\varepsilon', \lambda') \in \mathcal{U}$ rezultă că $U(\varepsilon, \lambda) \cap U(\varepsilon', \lambda') \geqslant$ $\geqslant U(\min(\varepsilon, \varepsilon'), \min(\lambda, \lambda'))$.

3) $U(\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{U}$ implică $U^{-1}(\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{U}$ căci $F_{pq} = F_{qp}$ implică simetria lui $U(\varepsilon, \lambda)$.

4) Fie $U = U(\varepsilon, \lambda)$ dată și să arătăm că $U \circ U \subseteq U$ deoarece incluziunea inversă este imediată. În adevăr dacă $(p, r) \in U$ și $(r, q) \in U$ atunci din relația $F_{pq}(\varepsilon) \geqslant \mathrm{Min}(F_{pr}(\varepsilon), F_{rq}(\varepsilon)) > 1 - \lambda$ rezultă că $(p, q) \in U$ adică $U \circ U \subseteq U$ și $\mathcal{U}$ este o bază de uniformități nearhimediene pe S.

5) Dacă $p \neq q$ rezultă că există $\varepsilon > 0$ astfel încît $F_{pq}(\varepsilon) \neq 1$ și deci există ε', λ' astfel încît $F_{pr}(\varepsilon') = 1 - \lambda'$. Prin urmare $(p, q) \notin U(\varepsilon', \lambda')$ și uniformitatea generată de $\mathcal{U}$ este de tip Harusdorff.

Scanned with OKEN Scanner

Corolarul 1. *Dacă* $(S, \mathcal{F}, T)$ *este un spațiu Menger nearhimedian care verifică ipotezele teoremei 3.1.8 atunci familia* $V_p(\varepsilon, \lambda) = \{q: F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$, $p \in S$, $\varepsilon > 0$ *și* $\lambda > 0$ *formează o bază de vecinătăți pentru o topologie Hausdorff pe* S.

Pentru demonstrație se verifică similar ca în [233] că această familie definește o bază de vecinătăți pentru topologia indusă de uniformitatea $\mathcal{U}$ pe S.

Corolarul 2. *Tolopogia definită pe* S *de familia* $V_p(\varepsilon, \lambda)$, $p \in S$, *cînd* $(S, \mathcal{F}, T)$ *verifică ipotezele teoremei 3.1.8 este metrizabilă.*

În adevăr considerînd $(\varepsilon_n, \lambda_n)$ un șir convergent către $(0, 0)$ atunci familia $U(\varepsilon_n, \lambda_n)$ este o bază numărabilă pentru $\mathcal{U}$.

Se știe [177, p. 471] că o caracterizare a spațiilor metrice nearhimediene este dată de faptul că vecinătățile $V(p, \varepsilon) = \{q \in S: d(p, q) \leqslant \varepsilon, p \in S\}$, sînt numai în următoarele situații:

$V(p, \varepsilon) \cap V(p', \varepsilon) = \varnothing$ sau $V(p, \varepsilon) \geqslant V(p', \varepsilon)$ sau $V(p, \varepsilon) \subseteq V(p', \varepsilon)$.

În cazul spațiilor Menger nearhimediene cu $T = \text{Min}$ avem că dacă $V_p(\varepsilon, \lambda) \cap V_q(\varepsilon', \lambda') \neq \varnothing$ cu $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$ și $\lambda \leqslant \lambda'$ atunci $V_p(\varepsilon, \lambda) \subseteq V_q(\varepsilon', \lambda')$. În adevăr, dacă $r \in V_p(\varepsilon, \lambda) \cap V_q(\varepsilon', \lambda')$ atunci pentru orice $s \in V_p(\varepsilon, \lambda)$ putem scrie $F_{sq}(\varepsilon') \geqslant \text{Min}\,(F_{sp}(\varepsilon), F_{pq}(\varepsilon')) \geqslant \text{Min}\,(F_{sp}(\varepsilon), \text{Min}\,(F_{pr}(\varepsilon), F_{rq}(\varepsilon')) > \text{Min}\,(1-\lambda, \text{Min}\,(1-\lambda, 1-\lambda')) = 1-\lambda'$ adică $s \in V_q(\varepsilon', \lambda')$. Rezultă că pentru orice $q \in V_p(\varepsilon, \lambda)$ avem că $V_q(\varepsilon, \lambda) \subseteq V_p(\varepsilon, \lambda)$ și deci $V_p(\varepsilon, \lambda)$ este o mulțime deschisă în topologia indusă de uniformitate pe $(S, \mathcal{F}, T)$.

Deoarece elementele lui $\mathcal{U}$ sînt simetrice și deschise deducem, ca și în [177], că avem

Teorema 3.1.9. *Uniformitatea și topologia indusă pe un spațiu Menger nearhimediaw* $(S, \mathcal{F}, T)$ *cu* $T = \text{Min}$ *sînt 0-dimensionale.*

Teorema 3.1.10. *Dacă* $\mathcal{U}$ *este o uniformitate pentru un spațiu Menger nearhimedian* $(S, \mathcal{F}, T)$ *cu* $T = \text{Min}$, *atunci există un izomorfism în sensul uniformităților pe un spațiu metrizabil nearhimedian.*

Teorema 3.1.11. *Fie* δ *relația de echivalență definită în corolarul propoziției* 3.1.7. *Dacă* T *are proprietatea că* $\sup_{x<1} T(x, x) = 1$ *și* $T(x, y) > 0$ *pentru* $x > 0$, $y > 0$ *atunci* $\hat{p} \in S/\delta$ *sînt submulțimi închise relativ la* (ε, λ)*-topologia din* S.

Demonstrație. Fie $p \in S$ și $B = \{q \in S: p\,\delta q\} = \{q: t_{pq} = 0\}$. Dacă $r \notin B$ atunci $t_{pr} > 0$ și din continuitatea la stînga a lui F_{pr} rezultă că $F_{pr}(t_{pr}) = 0$. Fie $z \in (0, t_{pr})$ și ε, λ astfel încît $0 < \varepsilon < t_{pr} - z$, $0 < \lambda < 1$. Dacă $s \in S$ și $F_{sr}(\varepsilon) > 1 - \lambda > 0$ atunci avem că $0 = F_{pr}(t_{pr}) \geqslant F_{pr}(\max\,(z, t_{pr} - z)) \geqslant T(F_{ps}(z), F_{sr}(t_{pr} - z)) \geqslant T(F_{ps}(z), F_{sr}(\varepsilon)) \geqslant T(F_{ps}(z), 1 - \lambda) \geqslant 0$ și deci $T(F_{ps}(z), 1 - \lambda) = 0$. Cum $1 - \lambda > 0$ rezultă că $F_{ps}(z) = 0$ și $t_{ps} \geqslant z > 0$. Cum $V_r(\varepsilon, \lambda) = \{s: F_{rs}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$ este o vecinătate a lui r în (ε, λ)-topologia lui S și $V_r(\varepsilon, \lambda) \subseteq S - B$ rezultă că $S - B$ este deschisă ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Cu privire la spațiile de tip Wald, pornind de la un rezultat care stabilește că la fiecare familie $\mathcal{D}$ de funcții $f: S \to (0, \infty)$ înzestrată cu proprietatea lui Harnack care cere existența unui $a = a(p, q)$ astfel ca pentru orice $f \in \mathcal{D}$ să avem $\frac{1}{a} \leqslant \frac{f(p)}{f(q)} \leqslant a$ se poate defini o pseudometrică pe S, care este metrică cînd $\mathcal{D}$ separă punctele lui S, în [87] se introduce metrica Harnack probabilistă. Schimbînd $\mathcal{D}$ cu o familie convenabilă $\mathcal{H}$ de funcții $h: S \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ care verifică inegalitatea probabilistă a lui Harnack în sensul că pentru fiecare $p, q \in S$ există $F \in \mathcal{R}_v^+$ astfel că pentru fiecare $h \in \mathcal{H}$ și fiecare x pentru care $F(x) > 0$ avem că $F(x) \leqslant h(p, x)/h(q, x) \leqslant 1/F(x)$ se definește

Scanned with OKEN Scanner

$D_{pq} = \sup \{F: F(x) \leqslant h(p, x)/h(q, x) \leqslant 1/F(x)$, oricare ar fi $h \in \mathcal{H}$, $x \in (0, \infty)\}$ și rezultă că $D_{pq} \in \mathcal{R}_v^+$. Dacă $\mathcal{F}(p, q) = D_{pq}$ iar $\mathcal{H}_x$ familia funcțiilor $\{p \to h(p, x)$, $h \in \mathcal{H}\}$ se arată că dacă există $x \in (0, \infty)$ astfel ca $\mathcal{H}_x$ să separe punctele lui S, atunci $(S, \mathcal{F})$ este un spațiu Wald.

Observație. O altă abordare prin metode constructive a *PM*-spațiilor, care generalizează spațiile Menger, îi aparține lui E. Nishiura [196] care introduce pentru un *PM*-spațiu $(S, \mathcal{F})$ funcția $T_{\mathcal{F}}: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ prin

$$T_{\mathcal{F}}(a, b) = \inf \{F_{pr}(x + y): F_{pq}(x) \geqslant a, \ F_{qr}(y) \geqslant b\}$$

pentru care arată că sînt îndeplinite proprietățile de definiție ale t-normei în sensul lui Menger în afară de $T(a, 1) > 0$ pentru $a > 0$ și că dacă $(S, \mathcal{F})$ este spațiu Menger față de o t-normă Menger T, atunci $T \leqslant T_{\mathcal{F}}$ pentru că $T_{\mathcal{F}}$ este cea mai tare funcție care verifică proprietățile amintite și inegalitatea IV_m. El introduce familia $\mathcal{D} = \{d_a: 0 \leqslant a \leqslant 1\}$ de funcții definite pe $S \times S$ cu valori în $[0, \infty]$ date prin $d_a(p, q) = \inf \{x: F_{pq}(x) > a\}$ și arată că aceasta este o familie de pseudometrici pe S dacă și numai dacă familia $\mathcal{F}$ satisface condiția

(*) $F_{pq}(x) > a$ și $F_{qr}(y) > a \Rightarrow F_{pr}(x + y) > a$ pentru fiecare $a \in [0, 1]$

Pentru orice $0 < a < 1$, d_a este o metrică dacă și numai dacă fiecare F_{pq}, $p \neq q$, este continuă în 0.

Notînd prin $U(x, a) = \{(p, q): F_{pq}(x) > a\}$, $U_p(x, a) = \{q: F_{pq}(x) > a\}$, $\mathcal{U} = \{U(x, a), x > 0, 0 \leqslant a < 1\}$, $\mathcal{U}_S = \{U_p(x, a): p \in S, x > 0, 0 \leqslant a < 1\}$ condiția (m) devine $U(x, a) \cdot U(x, a) \subseteq U(x + y, a)$, pentru orice $x, y > 0$, $0 \leqslant a < 1$. Se demonstrează că familia $\mathcal{U}$ este o bază pentru o uniformitate separată pe S dacă și numai dacă pentru fiecare pereche (x, a) există o pereche (x', a') astfel că $U(x', a') \cdot U(x', a') \subseteq U(x, a)$ care constituie și o condiție necesară și suficientă pentru ca $(S, \mathcal{U}_S)$ să fie metrizabilă.

1.3.3. Spații particulare și proprietăți ale lor. Ideea asocierii unei aceleiași funcții la orice pereche de puncte distincte, împreună cu alte noi căi utilizate de B. Schweier și A. Sklar au conturat clase particulare de spații care permit un studiu mai concret al diferitelor structuri probabiliste.

1) *Spații echilaterale.* Aceste spații folosite deja de Menger au proprietatea de a fi strîns legate de spațiile metrice echilaterale dacă asociem distanței statistice valoarea medie, mediana sau modul (cînd este unic).

Propoziția 3.1.8. *Fie* $(S, \mathcal{F})$ *un PM-spațiu echilateral (cu* $F_{pq}(x) = G(x) \in \mathcal{R}_v^+$ *pentru* $p \neq q$ *și* $F_{pq}(x) = H_0(x)$ *pentru* $p = q$*), atunci* (IV_m) *este verificată pentru* $T = \text{Max}$ *oricare ar fi tripletele de puncte distincte și universal relativ la* $T = \text{Min}$.

Reciproc, dacă $(S, \mathcal{F})$ este un *PM*-spațiu în care (IV_m) este verificată relativ la $T = \text{Max}$ pentru toate tripletele de puncte distincte, atunci el este un *PM*-spațiu echilateral.

Consecință. Orice *PM*-spațiu echilateral este un spațiu Menger pentru $T = \text{Min}$ și totodată este un spațiu Wald (după cum rezultă din teorema 3.1.2).

Există *PM*-spații echilaterale în care (IV_m) este verificată și pentru $T > \text{Max}$, pe triplete de puncte distincte, după cum rezultă din exemple [233, Ex. 1, 2].

2) *Spații simple.* În esență categoria spațiilor simple se obține dîndu-se un spațiu metric (S, d) și o funcție $G \in \mathcal{R}_v^+$ care face ca distanța să devină într-un anume sens vagă, conform unor reguli specificate.

Scanned with OKEN Scanner

Un PM-spațiu $(S, \mathcal{F})$ se numește *simplu (simplu nearhimedian) de prima categorie* dacă există o metrică d (respectiv nearhimediană) pe S și o funcție $G \in \mathcal{R}_0^+$ astfel încît să avem pentru orice pereche $p, q \in S$, $F_{pq}(x) = G(x/d(p, q))$, pentru $p \neq q$ și $F_{pq}(x) = H_0(x)$ pentru $p = q$.

Pentru a prezenta o teoremă de structură pentru aceste spații să amintim o inegalitate simplă care afirmă că oricare ar fi $x, y \geqslant 0$ și $a, b > 0$ avem

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Min}(x/a, y/b) \leqslant \frac{x+y}{a+b} \leqslant \operatorname{Max}(x/a, y/b)$$

egalitate avînd loc numai dacă $x/a = y/b$.

Teorema 3.1.12. *Orice PM-spațiu simplu (nearhimedian) de prima categorie este un spațiu Menger (spațiu Menger nearhimedian) în raport cu* $T = \operatorname{Min}$.

Demonstrație. Fie $p, q, r \in S$, $p \neq q \neq r \neq p$, atunci cum d este o metrică avem că $d(p, r) \leqslant d(p, q) + d(q, r)$, iar G fiind nedescrescătoare obținem pentru orice $x, y \geqslant 0$

$$\text{(2)} \qquad G\left(\frac{x+y}{d(p,r)}\right) \geqslant G\left(\frac{x+y}{d(p,q)+d(q,r)}\right) \geqslant G\left(\operatorname{Min}\left(\frac{x}{d(p,q)}, \frac{y}{d(q,r)}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{Min}\left(G\left(\frac{x}{d(p,q)}\right), G\left(\frac{y}{d(q,r)}\right)\right)$$

Pentru cazul nearhimedian se ține seama de condiția $d(p, r) \leqslant \max(d(p, q), d(q, r))$ și se obține că

$$\operatorname{Min}\left(\frac{x}{d(p,q)}, \frac{y}{d(q,r)}\right) \leqslant \operatorname{Min}\left(\frac{\max(x,y)}{d(p,r)}, \frac{\max(x,y)}{d(p,r)}\right) = \frac{\max(x,y)}{d(p,r)}$$

și deci

$$\operatorname{Min}\left(G\left(\frac{x}{d(p,q)}\right), G\left(\frac{y}{d(q,r)}\right)\right) \leqslant G\left(\frac{\max(x,y)}{d(p,r)}\right) = F_{pr}(\max(x,y))$$

ceea ce încheie demonstrația.

Evident că un spațiu metric echilateral generează un PM-spațiu echilateral și că dacă $G(x) = H_0(x - 1)$, PM-spațiul generat se reduce la spațiul generator căci $F_{pq}(x) = H_0((x/d(p, q)) - 1) = H_0(x - d(p, q))$.

Dacă luăm un triplet de puncte distincte cu $d(p, r) = d(p, q) + d(q, r)$ constatăm, din (1), că în asemenea spații simple $T = \operatorname{Max}$ este prea tare pentru a avea loc (IV_m). Mai mult dacă asupra lui G se pun condiții suplimentare obținem că $T = \operatorname{Min}$ este cea mai tare și anume:

Teorema 3.1.13. *Fie (S, d) un spațiu metric euclidian finit dimensional iar $G \in \mathcal{R}_0^+$ continuă și strict crescătoare pe $[0, \infty)$, atunci $T = \operatorname{Min}$ este cea mai tare t-normă T pentru care (IV_m) este verificată pentru toate tripletele de puncte distincte din S.*

Spațiile simple oferă exemple de spații Menger care nu sînt spații Wald, adică avem

Propoziția 3.1.9. *Există spații simple de prima categorie care nu sînt spații Wald.*

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, fie

$$F_{pq}(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ x/d(p, q), \ 0 \leqslant x \leqslant d(p, q), \\ 1, \ x > d(p, q). \end{cases}$$

În acest spațiu simplu dacă luăm $d(p, q) = 1$, $d(q, r) = 3$ și $d(p, r) = 3{,}75$ atunci pentru $2{,}50 < x < 3{,}68$ avem $(F_{pq} * F_{qr})(x) > F_{pr}(x)$ deși pentru x suficient de mic sau suficient de mare are loc (IV_m).

O altă clasă de spații simple sînt așa-zisele *spații simple de-a doua categorie* care cuprind PM-spațiile $(S, \mathcal{F})$ pentru care oricare ar fi $p, q \in S$ avem

$$F_{pq}(x) = \begin{cases} G(x - d(p, q)), \ p \neq q, \\ H_0(x), \ p = q, \end{cases}$$

unde $G \in \mathcal{R}_v^+$, iar d este o metrică pe S. Ele cuprind spațiile metrice pentru alegerea $G = H_0$ și avem

Teorema 3.1.14. *Orice spațiu simplu de categoria a doua este un spațiu Menger față de* $T = \text{Min}$.

Demonstrație. Oricare ar fi un triplet de puncte distincte $p, q, r \in S$ pentru $x < d(p, q)$ sau $y \leqslant d(q, r)$ avem $\text{Min}\{G(x - d(p, q)), G(y - d(q, r))\} = 0$ și (IV_m) se verifică trivial pentru $T = \text{Min}$. În caz contrar, cînd $x - d(p, q) > 0$ și $y - d(q, r) > 0$ vom avea

$$G(x + y - d(p, r)) > G(x - d(p, q) + y - d(q, r)) \geqslant G(\text{Max}\{x - d(p, q),$$
$$y - d(q, r)\}) \geqslant \text{Min}(G(x - d(p, q)), G(y - d(q, r)))$$

ceea ce încheie demonstrația teoremei.

PM-spațiile simple de prima categorie și spațiile echilaterale pot fi considerate ca un caz particular (respectiv pentru $\alpha = 1$ și $\alpha = 0$) ale clasei de spații date prin

Definiția 3.1.9. Orice PM-spațiu $(S, \mathcal{F})$ pentru care avem

$$F_{pq}(x) = \begin{cases} G(x/(d(p, q))^{\alpha}), \ p \neq q, \\ H(x), \ p = q, \end{cases}$$

unde d este o metrică pe S, $G \in \mathcal{R}_v^+$ iar $\alpha \geqslant 0$ se numesc *spații α-simple generate de (S, d) și G*.

Se poate arăta că și în acest caz spațiile obținute prin asocierea la fiecare pereche $p, q \in S$ valoarea medie sau rădăcina de ordin αk a momentului de ordin k corespunzător fiecărei funcții F_{pq}, cînd acestea există, se obțin spații metrice omotetice cu (S, d).

Vom avea

Propoziția 3.1.10. *Dacă* $0 \leqslant \alpha < 1$ *atunci orice spațiu α-simplu generat de (S, d) și G este un spațiu Menger în raport cu* $T = \text{Min}$.

Demonstrație. În cazul $\alpha = 0$ și $\alpha = 1$ s-a arătat mai sus iar în cazul $0 < \alpha < 1$ se arată ușor că funcția $\varphi^{\alpha}(\varphi(x) = x, \ x \in \mathbf{R})$ este strict crescătoare, concavă și $\varphi(0) = 0$. Se poate arăta că d^{α} este din nou o metrică pe S și deci spațiul α-simplu generat de (S, d) și G va coincide cu spațiul simplu generat de (S, d^{α}) și G.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd $\alpha > 1$ nu mai rezultă că d^α este o metrică pe S așa că numai restricționînd pe G se pot obține *PM-spații*. În adevăr, fie $(S, d) = (\mathbf{R}, d)$, G dată prin

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x < 1 \end{cases}$$

și să luăm $\alpha = 2$ și x, y, p, q, r astfel încît $x = y = d(p, q) = d(q, r) = 1$ iar $d(p, r) = d(p, q) + d(q, r) = 2$. Vom avea $F_{pr}(x) = F_{qr}(y) = 1$ și $F_{pr}(x+y) = G((x + y)/(d(p, r))^2) = G(1/2) = 1/2$. În acest fel nici forma slabă 4) a axiomei triunghiului nu este verificată. Cum pentru cazul $G(x) < 1$ pentru orice x finit această axiomă are loc automat, s-ar putea obține *PM-spații* de aceea se vor considera funcții $G \in \mathcal{R}_v^+$ particulare (continue și strict crescătoare pe $[0, \infty)$ ale căror inverse ale restricției se vor nota prin $(G^*)^{-1}$).

Vom avea

Teorema 3.1.15. [239] *Fie (S, d) un spațiu metric, $\alpha > 1$ și $G \in \mathcal{R}_v^+$ este continuă și strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Atunci spațiul α-simplu generat de (S, d) și G este un spațiu Menger relativ la t-norma strictă T dată prin*

$$T(u, v) = G\{[[(G^*)^{-1}(u)]^{1/(1-\alpha)} + [(G)^{-1}(v)]^{1/(1-\alpha)}]^{1-\alpha}\}$$

Dacă T este o t-normă cu generatorul aditiv f, atunci spațiul α-simplu generat de (S, d) și $f^{-1} \circ \varphi^{1/(1-\alpha)}$ este un spațiu Menger relativ la T.

Un studiu al *PM*-spațiilor nearhimediene care permite prezentarea deosebirii acestora față de *PM*-spațiile obișnuite poate fi găsit în [107] unde se consideră o funcție reală Ψ, continuă, strict crescătoare pe $[0, \infty)$ și cu $\Psi(0) = 0$ iar (S, d) un spațiu metric nearhimedian și se dă

Definiția 3.1.10. *Fie $G \in \mathcal{R}_v^+$ atunci PM-spațiul $(S, \mathcal{F})$ se numește Ψ-simplu generat de (S, d) și G dacă pentru orice $p, q \in S$*

$$F_{pq}(x) = \begin{cases} H_0(x), & \text{dacă } p = q, \\ G\left(\dfrac{x}{\Psi(d(p, q))}\right), & \text{dacă } p \neq q. \end{cases}$$

Evident că pentru $\Psi(t) = t$ și $\Psi(t) = t^\alpha$ se obțin spațiile simple sau α-simple nearhimediene generate de (S, d) și G.

Teorema 3.1.16. *Orice PM-spațiu nearhimedian Ψ-simplu generat de (S, d) și G este un spațiu Menger nearhimedian relativ la $T = \min$.*

Demonstrație. Să arătăm că dacă (S, d) este un spațiu metric nearhimedian atunci $(S, \Psi(d))$ este un spațiu metric nerahimedian și $\Psi(d)$ este o metrică echivalentă cu d pe S.

Se verifică ușor că $\Psi(d(p, q)) = \Psi(d(p, q))$ și că $\Psi(d(p, q)) = 0$ dacă și numai dacă $p = q$. De asemenea avem că

$$\Psi(d(p, q)) \leqslant \Psi(\max\{d(p, r), d(r, q)\}) = \max\{\Psi(d(p, r), \Psi(d(r, q))\}$$

oricare ar fi $p, q, r \in S$, adică $\Psi(d)$ este o metrică pe S.

Pentru a demonstra echivalența metricilor $\Psi(d)$ și d observăm că pentru orice $a > 0$ există $b > 0$ astfel încît $d(p, q) < a$ implică $\Psi(d(p, q)) < \Psi(a) = b$ și pentru orice $b' > 0$, cu proprietaea $\Psi(d(p, q)) < b'$, există $a' = \Psi^{-1}(b')$ astfel că $d(p, q) < a'$.

Scanned with OKEN Scanner

Repetînd raționamentul din teorema 3.1.12 deducem că orice PM-spațiu nearhimedian Ψ-simplu generat de (S, d) și G este un spațiu Menger nearhimedian relativ la $T = \text{Min}$.

Din această teoremă se deduce deosebirea dintre PM-spațiile nearhimediene și PM-spațiile obișnuite care am văzut că numai cu anumite restricții asupra lui G, spațiile α-simplu generate de (S, d) și G, pentru $\alpha > 1$, sînt spații Menger.

3) *PM-spații care provin de la mulțimi de vectori aleatori n-dimensionali.* B. Schweizer și A. Sklar introduc clase speciale de PM-spații pornind de la observația că dacă $p, q, \ldots$ sînt variabile aleatoare pe un spațiu metric (S, d) funcția $d(p, q)$ este o variabilă aleatoare pe $S \times S$ și asociind acestora funcția de repartiție F_{pq} se obține un PM-spațiu.

Fie S_n^* mulțimea variabilelor aleatoare n-dimensionale nedegenerate, gaussiene pe $(\mathbf{R}^n, d)$, reciproc independente și sferic simetrice. Notăm cu m_p (un punct din $\mathbf{R}^n$) valoarea medie a lui $p \in S_n^*$ și prin σ_p deviația standard comună a repartițiilor marginale unidimensionale ale lui p iar

$$r = r(p, q) = d(m_p, m_q), \quad p, q \in S_n^*$$

d fiind metrica euclidiană pe $\mathbf{R}^n$ și

$$\sigma = \sigma(p, q) = (\sigma_p^2 + \sigma_q^2)^{1/2}$$

ar funcția de repartiție F_{pq} a lui $d(p, q)$, (pentru $\sigma > 0$) dată prin

$$(1) \quad F_{pq}(x) = \mathbf{R}_n(\sigma, r; x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left(\frac{r}{\sigma}\right)^{1-n/2} e^{-r^2/2\sigma^2} \int_0^{x/\sigma} y^{n/2} I_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{r}{\sigma} y\right) e^{-y^2/2}\, dy, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Aici I_ν este funcția lui Bessel de ordinul ν, modificată. Dacă

$$\sigma = 0 \text{ se ia } F_{pq}(x) = \mathbf{R}_n(0, r; x) = H_0(x - r)$$

Această repartiție $\mathbf{R}_n$ a fost întîlnită de diferiți autori, ea fiind legată de variabila aleatoare $d(p, q)$ al cărei pătrat $d^2(p, q)$ este D_1^2-statistica lui P. C. Mahalanobis sau întîlnindu-se în studiul proceselor Rayleigh generalizate.

Vom avea

Definiția 3.1.11. Un PM-spațiu $(S_n, \mathcal{F})$ se numește *spațiu normal* n-dimensional dacă $S_n \subseteq S_n^*$, are proprietatea că pentru orice punct $m \in \mathbf{R}^n$ există cel puțin un element $p \in S_n$ a cărui valoare medie este m iar $\mathcal{F}(p, q) = F_{pq}$ este dată de (1) pentru orice $p, q \in S_n$. Dacă $\sigma_p = \sigma_q$ pentru orice $p, q \in S_n$ spațiul se numește *omogen* iar în caz contrar *neomogen*.

Spațiile normale sînt spații Menger față de $T = T_m$, (IV_m) fiind verificată neuniversal și pentru alte t-norme mai tari cînd spațiul este omogen. Întrucît există triplete pentru care nu este verificată față de $T = \text{Prod}$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$ rezultă că nici un spațiu normal nu este de tip Wald.

O clasă mai generală de spații este introdusă în [237] pornind de la variabile aleatoare p, q în $\mathbf{R}^n$ ale căror funcții de repartiție G_p, G_q sînt cunoscute împreună cu funcția de repartiție comună $2n$-dimensională H_{pq} care se știe că posedă proprietățile

$$H_{pq}(w_1, \ldots, w_n, \infty, \ldots, \infty) = G_p(w_1, \ldots, w_n)$$

$$H_{pq}(\infty, \ldots, \infty, w_{n+1}, \ldots, w_{2n}) = G_q(w_{n+1}, \ldots, w_{2n})$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz $d(p, q)$ este o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție F_{pq} este bine determinată de H_{pq} prin

$$(2) \qquad F_{pq}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \iint\limits_{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|<x} \dots \int dH_{pq}(\mathbf{w}), & x > 0 \end{cases}$$

unde $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{2n})$, $\mathbf{u} = (w_1, \dots, w_n)$, $v = (w_{n+1}, \dots, w_{2n})$ iar $\|\cdot\|$ este norma euclidiană în $\mathbf{R}^n$.

Interpretînd variabila aleatoare p ca și o particulă a cărei poziție în $\mathbf{R}^n$ este determinată probabilistic vom avea că $G_p(u)$ dă probabilitatea cu particula p să se găsească în regiunea $\{\mathbf{v}: v_1 < u_1, \dots, v_n < u_n\}$ iar $F_{pq}(x)$ dă probabilitatea că particulele p și q să fie la distanță mai mică decît x. Cu această interpretare mulțimea $\{p, q, \dots\}$ înzestrată cu distanța F_{pq} este un PM-spațiu, adică avem

Definiția 3.1.12. Un PM-spațiu $(S, \mathcal{F})$ se numește *spațiu generat de repartiții* pe $\mathbf{R}^n$ dacă

1) mulțimea S este formată din variabile aleatoare cu valori în $\mathbf{R}^n$,

2) aplicația $\mathcal{F}$ este dată prin relația (2).

Dacă orice două puncte distincte p, q sînt independente (adică $H_{pq}(\mathbf{w}) = G_p(\mathbf{u}) \cdot G_q(\mathbf{v})$ pentru orice $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$) iar fiecare punct p este dat printr-o densitate de probabilitate n-dimensională sferic simetrică și unimodală sau este concentrată într-un singur punct din $\mathbf{R}^n$ spunem că avem un *C-spațiu*.

Se convine să se numească puncte nesingulare ale unui C-spațiu acelea care posedă o densitate proprie restul numindu-se singulare. În acest caz densitatea g_p asociată unui punct nesingular se asociază cu un „nor" în $\mathbf{R}^n$ a cărui densitate în fiecare punct al lui $\mathbf{R}^n$ măsoară probabilitatea de a se găsi particula p în vecinătatea acelui punct. Uneori punctul p se identifică cu norul respectiv iar C-spațiul cu mulțimea norilor sferic simetrici și unimodali.

Punctele singulare se identifică cu puncte c_p ale C-spațiului și dacă toate punctele sînt singulare C-spațiul se identifică cu un spațiu metric nediscernabil de o submulțime a lui $\mathbf{R}^n$. În cazul punctelor nesingulare c_p va fi centrul de simetrie și modul lui g_p iar dacă p este singular c_p se reduce la un singur punct din $\mathbf{R}^n$ în care este coneentrată probabilitatea lui p.

S-au introdus și clase speciale de C-spații cum sînt *C-spațiile omogene* (în care toate punctele sînt nesingulare și densitățile g_{pq} sînt identice pentru orice $p \neq q$ sau toate punctele sînt singulare) sau *C-spațiile semiomogene* (cînd există o funcție g astfel că dacă $p \neq q$ sînt ambele nesingulare există un număr $\sigma_{pq} > 0$ astfel încît să avem $g_{pq}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sigma_{pq}^n} g\left(\frac{1}{\sigma_{pq}} \mathbf{u}\right)$ iar dacă p și q sînt ambele singulare sau $p = q$ se ia $\sigma_{pq} = 0$ și pentru orice triplete de puncte p, q, r numerele σ_{pq}, σ_{qr}, σ_{pr} satisfac inegalitatea obișnuită a triunghiului).

Orice C-spațiu este un spațiu Menger relativ la T_w, C-spațiile omogene sînt spații Menger pentru $T = T_m$ dar există C-spații omogene care nu sînt Menger relativ la $T = \text{Prod}$ [237].

Cu privire la spațiile metrice asociate cu ajutorul momentelor avem o comportare asemănătoare cu cazul spațiilor normale în sensul că metricile Fréchet-Minkowski $(M_k(F_{pq}))^{1/k}$, $k \geqslant 1$ sînt asimptotic euclidiene „în mare" iar „în mic" (cînd $d(c_p, c_q)$ este mică) distanța Fréchet-Minkowski aproximează un număr pozitiv minim.

Scanned with OKEN Scanner

Un concept mai general introdus în [242] este cel de spațiu N-consistent generat de repartiții peste $\mathbf{R}^n$ (sau ω-consistent) prin care se înțelege orice pereche $(S, \mathcal{F})$ în care pentru orice k, $1 \leqslant k \leqslant N$, $N \geqslant 2$ fixat și orice mulțime de k puncte $p_1, p_2, \ldots, p_k$ din S se asociază o funcție de repartiție kn-dimensională $H_{p_1 \ldots p_k}$ cu proprietățile

$$H_{p_1 \ldots p_k}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k) = H_{p_{\sigma(1)} p_{\sigma(2)} \ldots p_{\sigma(k)}}(\mathbf{w}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{w}_{\sigma(k)})$$

și

$$H_{p_1 \ldots p_k}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{k-1}, (\infty, \ldots, \infty)) = H_{p_1 \ldots p_{k-1}}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{k-1})$$

unde σ este orice permutare a mulțimii $\{1, 2, \ldots, k\}$ și $\mathbf{w}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, este un vector n-dimensional dat prin

$$\mathbf{w}_i = (w_{n(i-1)+1}, w_{n(i-1)+2}, \ldots, w_{n(i-1)+n})$$

Aplicația $\mathcal{F}$ este dată prin (2).

Dacă $(S, \mathcal{F})$ este N-consistent pentru orice $N \geqslant 2$ se numește *spațiu ω-consistent* generat de repartiții pe $\mathbf{R}^n$.

1.4. PUNCTUL DE VEDERE INTRODUS DE ŠPAČEK ȘI COMENTARII

A. Špaček, pornind de la aprecierea că geometria probabilistă a lui Menger este de fapt o teorie a funcțiilor de tip distanță aleatoare pe un spațiu abstract $S \neq 0$, propune introducerea metricilor aleatoare pe spații abstracte cu ajutorul unor variabile aleatoare care iau valori în mulțimea metricilor pe acea mulțime. Această variabilă aleatoare împreună cu spațiul de bază induce o σ-algebră adecvată de părți ale spațiului funcțiilor reale F definite pe $S \times S$ care împreună cu o probabilitate pe ea conduce la o funcție aleatoare adică la un proces aleator de tip spațiu de funcții, în conformitate cu terminologia lui Doob J. L. Cînd în acest spațiu de probabilitate indus este posibil de a restricționa probabilitatea indusă la submulțimea tuturor metricilor, se definește spațiul de probabilitate restricționat împreună cu aplicația identică pe el ca fiind o versiune a unei metrici aleatoare. Acest procedeu păstrează proprietățile probabilistice importante, conceptul de metrică aleatoare are un sens intuitiv satisfăcător cu diferite interpretări în cercetarea experimentală dintre care sînt menționate în mod deosebit teoria informației și procesele de decizie statistică.

Fie $X \neq \varnothing$, $\mathbf{F} = \{f, f: X \to \mathbf{R}\}$, $B_{x,r} = \{f \in \mathbf{F}: f(x) < r\}$, $B_{A,R} = \{f: f \in \mathbf{F}, f(x) < r, x \in A, r \in \mathbf{R}\}$ atunci prin $\mathcal{A}(A)$ vom nota cea mai mică σ-algebră generată de $B_{A,\mathbf{R}}$. Evident că $\mathcal{A}(A)$ nu depinde de alegerea generatorilor σ-algebrei $\mathcal{B}^1$. Vom avea că $\mathcal{A}(A) \subseteq \mathcal{A}(B) \subseteq \mathcal{A}(X)$ dacă $A \subseteq B \subseteq X$, σ-algebra $\mathcal{A}(X)$ luîndu-se ca mulțime de evenimente pentru cîmpul de evenimente $\{\mathbf{F}, \mathcal{A}(X)\}$. Această σ-algebră de evenimente are proprietatea că

$$\mathcal{A}(X) = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \mathcal{A}(D) \tag{1}$$

unde $\mathcal{D}$ este o clasă de submulțimi numărabile ale lui X care satisfac proprietățile:

a) $X = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$

b) pentru orice I, $\operatorname{card}(I) \leqslant \gamma_0$ și $D_i \in \mathcal{D}$ rezultă că există cel puțin un $D \in \mathcal{D}$ astfel încît $\bigcup_{i \in I} D_i \subseteq D$.

De exemplu se poate lua pentru $\mathcal{D}$ familia părților numărabile ale lui X.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a demonstra proprietatea (1) să observăm că $D \subseteq X$ implică $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(X)$ oricare ar fi $D \in \mathcal{D}$ adică $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} \mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(X)$.

Reciproc să arătăm că $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} \mathcal{A}(D)$ este o σ-algebră care conține familia de generatori $\{B_{X,r}\}_{r\in\mathbf{R}}$.

În adevăr, pentru orice $B \in \bigcup_{D\in\mathcal{D}} \mathcal{A}(D)$ există $D_B \in \mathcal{D}$ astfel că $B \in \mathcal{A}(D_B)$ care fiind σ-algebră implică și $\mathbf{C}B \in \mathcal{A}(D_B)$. De asemenea oricare ar fi $\{B_n\} \subseteq \bigcup \mathcal{A}(D)$ rezultă că pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ există $D_n \in \mathcal{D}$ cu proprietatea că $B_n \in \mathcal{A}(D_n)$ iar din b) există $D \in \mathcal{D}$ astfel încît $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} D_n \subseteq D$. Deducem astfel, din $D_n \subseteq D$, că $\mathcal{A}(D_n) \subseteq \mathcal{A}(D)$ și deci $B_n \in \mathcal{A}(D)$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ care implică $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n \in \mathcal{A}(D) \subseteq \bigcup_{D\in\mathcal{D}} \mathcal{A}(D)$ deci membrul drept din (1) este o σ-algebră. Mai mult, ea conține familia $\{B_{X,r}\}_{r\in\mathbf{R}}$ căci pentru orice $x \in X$ există $D_x \in \mathcal{D}$ cu $x \in D_x$ și $B_{x,r} \in \mathcal{A}(D_x)$ din modul cum s-a definit $\mathcal{A}(D_x)$ deci $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} \mathcal{A}(D) \supseteq \{B_{X,r}\}_{r\in\mathbf{R}}$ ceea ce implică și $\mathcal{A}(X) \subseteq \bigcup_{D\in\mathcal{D}} \mathcal{A}(D)$ adică (1) este demonstrată.

Lema 3.1.6. *Pentru fiecare $E \in \mathcal{A}(X)$ există un $D_E \in \mathcal{D}$ astfel că* $E = \bigcup_{g\in E} \bigcap_{x\in D_E} \{f: f(x) = g(x)\}$.

Demonstrație. Să notăm pentru orice $A \subseteq X$ prin $\mathcal{B}(A)$ clasa tuturor mulțimilor de forma $\bigcap_{x\in A} \{f: f(x) = g(x)\} \subseteq F$ unde g parcurge pe F. Să observăm că mulțimea reuniunilor arbitrare de părți ce aparțin lui $\mathcal{B}(A)$ formează o σ-algebră pe care o notăm prin $\mathcal{C}(A)$ și cum orice $C = \{f: f(x) < r\}$, $x \in A$, pentru fiecare $r \in \mathbf{R}$ se poate scrie sub forma

$$C = \bigcup_{g\in C} \bigcap_{x\in A} \{f: f(x) = g(x)\}$$

rezultă că $C \in \mathcal{C}(A)$ și deci $\mathcal{A}(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$ pentru $A \subseteq X$. Din (1) rezultă că pentru orice $E \in \mathcal{A}(X)$ există un $D_E \in \mathcal{D}$ astfel încît $E \in \mathcal{A}(D_E)$ și deducem că $E \in \mathcal{C}(D_E)$. Pe de altă parte din definiția lui $\mathcal{C}(D_E)$ rezultă că

$$\bigcap_{x\in D_E} \{f: f(x) = g(x)\} \subseteq E \text{ pentru } g \in E$$

care implică

$$\bigcup_{g\in E} \bigcap_{x\in D_E} \{f: f(x) = g(x)\} \subseteq E$$

iar incluziunea inversă fiind evidentă rezultă că lema este demonstrată.

A. Špaček [276] introduce o *regularizare* a spațiului de aplicații cu ajutorul unei transformări $\mathbf{T}$, de la mulțimea părților lui X la mulțimea părților lui $\mathbf{F}$, verificînd următoarele condiții:

T_1) dacă $D \in \mathcal{D}$ și $g \in \mathbf{T}(D)$ atunci $\mathbf{T}(X) \cap \bigcap_{x\in D} \{f: f(x) = g(x)\} \neq \emptyset$,

T_2) dacă $D \in \mathcal{D}$ atunci $\mathbf{T}(D) \in \mathcal{A}(X)$,

T_3) dacă $A \subseteq B \subseteq X$ atunci $\mathbf{T}(B) \subseteq \mathbf{T}(A)$,

T_4) $\mathbf{T}(X) \neq \emptyset$.

Evident că $\mathbf{T}(A) = \mathbf{F}$, pentru orice $A \subseteq X$, verifică condițiile T_1) — T_4) însă există și altele netriviale cum este cazul unei mulțimi abstracte $S \neq \emptyset$ căreia îi asociem $X = S \times S$, $\mathbf{F} = \{f: X = S \times S \to \mathbf{R}\}$ iar $\mathcal{D}$ fiind dată de

familia tuturor părților numărabile ale lui $X = S \times S$. Vom defini pentru orice $A = A_1 \times A_2 \subseteq X = S \times S$ pe $\mathbf{T}(A)$ prin

$$\mathbf{T}(A) = \{d \in \mathbf{F}: d \text{ este o metrică pe } Pr_1 A = A_1\}$$

Se verifică ușor că $\mathbf{T}$ satisface condițiile T_1)—T_4) căci de fapt T_1) înseamnă că dacă d este o metrică pe $Pr_1 D$ există o metrică d' pe $Pr_1 X$ care coincide cu d pe $Pr_1 D$, ceea ce se poate construi ușor luînd, spre exemplu

$$d'(x, y) = \begin{cases} d(x, y) \text{ pentru } x, y \in D, \\ d''(x, y) = 0 \text{ pentru } x = y \text{ și } d'(x, y) = 1 \text{ pentru } x \neq y, \\ 1 + d(a, x) \text{ pentru } x \in D,\ y \in \mathbf{C}D,\ a \in D \text{ fixat}, \\ d'(x, y) = d'(y, x) \text{ dacă } x \in \mathbf{C}D \text{ și } y \in D. \end{cases}$$

T_2) rezultă din faptul că

$$\mathbf{T}(D) = \Big(\bigcap_{x, y \in Pr_1 D\ x \neq y} \{f: f(x, y) > 0\}\Big) \cap \Big(\bigcap_{x \in Pr_1 D} \{f: f(x, x) = 0\}\Big) \cap \Big(\bigcap_{x, y \in Pr_1 D} \{f: f(x, y) = f(y, x)\}\Big) \cap \Big(\bigcap_{x, y, z \in Pr_1 D} \{f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z)\}\Big)$$

Introducînd funcția $\xi_{x, y}: \mathbf{F} \to \mathbf{R}$ definită prin $\xi_{x, y}(f) = f(x, y)$ deducem că $\xi_{x, y}$ este $\mathcal{A}(X)$-măsurabilă pentru că

$$\{f: \xi_{x, y}(f) < r\} = \{f: f(x, y) < r\} = B_{(x, y), r} \in \mathcal{A}(X),\ r \in \mathbf{R}$$

prin definiția lui $\mathcal{A}(X)$.

Pe de altă parte avem

$$D^1_{x, y} = \{f: f(x, y) > 0\} = \xi^{-1}_{x, y}(0, \infty) \in \mathcal{A}(X),$$

$$D^2_{x, x} = \{f: f(x, x) = 0\} = \xi^{-1}_{x, x}(0) \in \mathcal{A}(X),$$

$$D^3_{x, y} = \{f: f(x, y) = f(y, x)\} = (\xi^{-1}_{x, y} - \xi^{-1}_{y, x})(0) \in \mathcal{A}(X),$$

$$D^4_{x, y, z} = \{f: f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z)\} = (\xi^{-1}_{x, y} + \xi^{-1}_{y, z} - \xi^{-1}_{x, z})([0, \infty)) \in \mathcal{A}(X)$$

iar D fiind numărabilă rezultă că $\mathbf{T}(D) \in \mathcal{A}(X)$.

T_3) rezultă din observația că dacă $A \subseteq B$ atunci orice metrică pe B este o metrică pe A iar T_4) rezultă din faptul că orice mulțime $S = \mathrm{Pr}_1 X$ poate fi metrizată, de exemplu, prin $d(x, y) = 0$ pentru $x = y$ și 1 pentru $x \neq y$, adică $\mathbf{T}(X) \neq \varnothing$.

Lema 3.1.7. *Dacă* $\mathbf{T}$ *este o transformare de regularizare și dacă* $\mathbf{T}(X) \subseteq E \in \mathcal{A}(X)$ *atunci există o mulțime* $D_E \in \mathcal{D}$ *astfel încît* $\mathbf{T}(D_E) \subseteq E$.

Demonstrație. Fie D_E mulțimea dată de lema 3.1.6 pentru $\mathbf{C}E$. Dacă lema de mai sus este falsă rezultă că la fiecare element al lui $\mathcal{D}$ deci și pentru D_E corespunde un element $h_E \in \mathbf{F}$ și $h_E \in \mathbf{T}(D_E) \cap \mathbf{C}E$. Însă din T_1) există $f_0 \in \mathbf{T}(X) \cap \bigcap_{x \in D_E} \{f: f(x) = h_E(x)\}$ căci $h_E \in \mathbf{T}(D_E)$ iar din $h_E \in \mathbf{C}E$ și lema 3.1.6 rezultă că $\bigcap_{x \in D_E} \{f: f(x) = h_E(x)\} \subseteq \mathbf{C}E$. Afirmația $f_0 \in \mathbf{T}(X)$, deci $f_0 \in E$ și $f_0 \in \bigcap_{x \in D_E} \{f: f(x) = h_E(x)\}$ fiind o contradicție, rezultă că lema nu este falsă.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că în demonstrația acestei leme a intervenit numai proprietatea T_1) a lui **T**.

Fie $M \subseteq \mathbf{F}$ atunci $M \cap \mathcal{A}(X) = \{M \cap E, E \in \mathcal{A}(X)\}$ este o σ-algebră de părți ale lui M. Conform precizărilor din introducerea acestui paragraf rezultă că dacă există o probabilitate P pe $\mathcal{A}(X)$ atunci $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ este o transformare aleatoare sau un proces aleator generalizat și vom avea

Definiția 3.1.13. Procesul aleator $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ se numește *aproape sigur T-regulat* sau *T-regulat cu probabilitatea 1* adcă există o probabilitate și numai una P' pe $\mathbf{T}(X) \cap \mathcal{A}(X)$ astfel că $P'(\mathbf{T}(X) \cap E) = P(E)$ pentru orice $E \in \mathcal{A}(X)$.

Dintr-un rezultat al lui J. L. Doob [61] se deduce imediat că $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ este **T**-regulat cu probabilitatea 1 dacă și numai dacă $P^*(\mathbf{T}(X)) = 1$ unde P^* este probabilitatea exterioară indusă de P.

Vom avea

Teorema 3.1.17. *Condiția necesară și suficientă pentru ca procesul aleator* $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ *să fie a.s.***T***-regulat este ca* $P(\mathbf{T}(D)) = 1$ *pentru orice* $D \in \mathcal{D}$.

Demonstrație. Necesitatea rezultă din faptul că $\mathbf{T}(X) \subseteq \mathbf{T}(D)$ căci $D \subset X$, oricare ar fi $D \in \mathcal{D}$ după cum rezultă din T_3) și atunci $P^*(\mathbf{T}(X)) \leqslant P^*(\mathbf{T}(D)) = P(\mathbf{T}(D))$ căci $\mathbf{T}(D) \in \mathcal{A}(X)$ conform proprietății T_2) și cum $P^*(\mathbf{T}(X)) = 1$ rezultă că $P(\mathbf{T}(D)) = 1$.

Suficiența rezultă din definiția măsurii exterioare căci $P^*(\mathbf{T}(X)) = \inf_{E \in \mathcal{A}(X),\, E \supseteq T(X)} \{P(E)\}$ și din lema 3.1.6 rezultă că pentru fiecare $E \in \mathcal{A}(X)$, $E \supseteq \mathbf{T}(X)$ există $D_E \in \mathcal{D}$ cu $\mathbf{T}(D_E) \subseteq E$ ceea ce implică $P(\mathbf{T}(D_E)) \leqslant P(E)$. Deci $P(E) = 1$ pentru toate submulțimile E după care se calculează infimumul și teorema este demonstrată.

T-regularizarea de mai sus permite ca luînd pentru X un spațiu metric separabil să se introducă transformări aleatoare P.a.s. uniform continue sau caracterizări pentru ca acestea să aibă P.a.s. proprietatea lui Lipschitz.

De asemenea luînd X o σ-algebră booleană cu unitate și pentru $A \subseteq X$ o subalgebră cu aceeași unitate se demonstrează existența prelungirilor de funcții aditive de la A la X și se dau caracterizări pentru ca transformarea aleatoare $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ să fie P-a.s. aditivă.

Mai important pentru ceea ce urmează este cazul cînd pentru $A \subseteq X$ se definește $\mathbf{T}(A)$ prin mulțimea funcțiilor din **F** care sînt metrici pe A caz care a condus la un nou tip de spații metrice aleatoare.

Definiția 3.1.14. Fie S o mulțime arbitrară, $X = S \times S$ și $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ funcția aleatoare asociată ca mai sus. Dacă pentru fiecare $A \subseteq S$ se definește **T**-regularizarea care asociază lui $A \times A \subseteq X$ mulțimea $\mathbf{T}(A)$ a tuturor funcțiilor din **F** care sînt metrici pe A, se spune că $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ este o *metrică aleatoare în sensul lui Špaček* sau o *metrică cu probabilitatea 1* dacă $P^*(\mathbf{T}(S)) = 1$, P^* fiind măsura exterioară indusă de P. Uneori vom înțelege prin spațiu Špaček perechea $(S, (F, \mathcal{A}(X), P))$.

Luînd pentru **T** aplicația definită în exemplificarea ce urmează formulării noțiunii de rgularizare rezultă

Teorema 3.1.18. *Condiția necesară și suficientă ca funcția aleatoare* $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ *să fie o metrică aleatoare este ca să avem*

c_1) $P(\{f: f(x, x) = 0\}) = 1$ *pentru orice* $x \in S$,

c_2) $P(\{f: f(x, y) > 0\}) = 1$ *pentru orice* $x, y \in S$, $x \neq y$,

c_3) $P(\{f: f(x, y) = f(y, x)\}) = 1$ *pentru* $x, y \in S$,

c_4) $P(\{f: f(x, y) + f(y, z) \geqslant f(x, z)\}) = 1$ *pentru* $x, y, z \in S$,

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. În adevăr, dacă $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ este o metrică aleatoare atunci $P^*(\mathbf{T}(S)) = 1$ iar din a) rezultă că pentru orice $x, y, z \in S$ există $D \in \mathcal{D}$ astfel încît oricare dintre perechile formate cu elementele x, y, z sînt din D. Din teorema 3.1.17 deducem că $P(\mathbf{T}(D)) = 1$ iar pe de altă parte $\mathbf{T}(D)$ se conține în oricare dintre mulțimile $D^1_{x,y}$, $D^2_{x,x}$, $D^3_{x,y}$, $D^4_{x,y,z}$ căci $\mathbf{T}(D)$ conține toate metricile $Pr_1 D$, fiecare dintre mulțimile amintite sînt din $\mathcal{A}(X)$ și deci ele au probabilitatea egală cu 1, ceea ce este echivalent cu $c_1) - c_4)$.

Pentru implicația inversă amintim că din $P(A) = 1$ și $P(B) = 1$ rezultă $P(A \cup B) = 1$ și $P(A \cap B) = 1$. Din ipoteza $P(D^i_{x,y,z}) = 1$ oricare ar fi $x, y, z \in Pr_1 D$, $i = 1, 2, 3, 4$, $D \in \mathcal{D}$ și din definiția lui $\mathbf{T}(D)$ rezultă că $P(T(D)) = 1$. Din teorema 3.1.17 deducem că $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ este $\mathbf{T}$-regulat cu probabilitatea 1.

Se introduce noțiunea de *metrică simplă* d pe S ca fiind acea metrică pentru care există o parte numărabilă $A \subseteq S$ astfel că $d(x, y) = 1$ pentru orice $x, y \in S - A$, $x \neq y$ și se notează mulțimea metricilor simple pe S cu $\mathbf{L}$. Se numește *metrică aleatoare simplă în* X cîmpul de probabilitate $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ pentru care există o măsură de probabilitate P' pe σ-algebra $\{\mathbf{L} \cap E, E \in \mathcal{A}(X)\} = \mathcal{L}$ a părților lui $\mathbf{L}$, astfel încît $P'(L \cap E) = P(E)$ pentru orice $E \in \mathcal{A}(X)$, adică dacă $P^*(\mathbf{L}) = 1$.

În mod similar se notează cu $\mathbf{Q}$ mulțimea metricilor separabile pe S și atunci dacă $P^*(\mathbf{Q}) = 1$ cîmpul de probabilitate $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ se numește *metrică aleatoare separabilă*. Cum fiecare metrică pe o mulțime numărabilă este simplă și separabilă deducem din teorema 3.1.17 că avem

Propoziția 3.1.11. 1) *Orice metrică aleatoare este simplă.*

2) *Dacă* $card(S) < 2^{\aleph_0}$, *atunci orice metrică aleatoare pe* S *este separabilă.*

Fie $\mathbf{M}$ mulțimea tuturor metricilor pe S iar $\mathbf{L}$ și $\mathbf{Q}$ mulțimile de mai sus, atunci putem vorbi de restricțiile funcției $\xi_{x,y}: \mathbf{F} \to \mathbf{R}$ la aceste mulțimi, pe care le notăm prin $\xi^{\mathbf{M}}_{x,y}(.)$, $\xi^{\mathbf{L}}_{x,y}(.)$, $\xi^{\mathbf{Q}}_{x,y}(.)$ ($\xi^{\mathbf{M}}_{x,y}: \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ prin $\xi^{\mathbf{M}}_{x,y}(f) = f(x, y)$, $f \in \mathbf{M}$). Cum σ-algebra $\mathcal{A}(X)$ s-a definit astfel ca $\xi_{x,y}(.)$ să fie măsurabilă relativă la $\mathcal{A}(X)$ rezultă că $\xi^{\mathbf{M}}_{x,y}$, $\xi^{\mathbf{L}}_{x,y}$, $\xi^{\mathbf{Q}}_{x,y}$ sînt măsurabile relativ la $\mathcal{M} = \{\mathbf{M} \cap E\}$, $\mathcal{L}, \mathcal{N} = \{\mathbf{Q} \cap E\}$, $E \in \mathcal{A}(X)$, $x, y \in S$.

Dacă integrala $\int_{\mathbf{F}} \xi_{x,y}(f)\, dP$ există pentru fiecare pereche $x, y \in S$, atunci $d: S \times S \to \mathbf{R}$ dată prin

$$d(x, y) = \int_{\mathbf{F}} \xi_{x,y}(f)\, dP$$

se numește valoarea medie a lui ξ și avem

Propoziția 3.1.12. *Dacă* $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ *este o metrică aleatoare și dacă valoarea medie a lui* ξ *există, atunci funcția* d *definită mai sus este o metrică obișnuită (rigidă) pe* S *și avem*

$$d(x, y) = \int_{\mathbf{M}} \xi^{\mathbf{M}}_{x,y}(f)\, dP' = \int_{\mathbf{L}} \xi^{\mathbf{L}}_{x,y}(f)\, dP''$$

pentru orice $x, y \in S$ *iar* P', P'' *fiind măsurile de probabilitate induse pe* $\mathcal{M}$ *și* $\mathcal{L}$.

Dacă $card(S) < 2^{\aleph_0}$, atunci

$$d(x, y) = \int_{\mathbf{Q}} \xi^{\mathbf{Q}}_{x,y}(f)\, dP'''$$

P''' fiind măsura de probabilitate indusă pe $\mathcal{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă există valoarea medie a lui ξ și d este o metrică nu rezultă că $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ este o metrică aleatoare; de exemplu, cînd $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ este o metrică probabilistă în sensul lui Menger. În general o metrică în sensul lui Menger nu este metrică în sensul lui Špaček. De asemenea chiar dacă proprietatea unei metrici aleatoare, de a fi simplă sau în ipoteze suplimentare separabilă, este automat verificată, acestea nu se transferă metricii medii d.

Propoziția 3.1.13. *Dacă funcția aleatoare* $(F, \mathcal{A}(X), P)$ *este o metrică Špaček, atunci avem*

c_1') $P(\{f: f(x, x) < r\}) = 1$ *pentru orice* $x \in S$, $r > 0$,
c_2') $P(\{f: f(x, y) < r\}) = 0$ *pentru orice,* x, $y \in S$, $r \leqslant 0$,
c_3') $P(\{f: f(x, y) < r\}) = P(\{f: f(y, x) < r\})$ *pentru orice* x, $y \in S$, $r \in \mathbf{R}$,
c_4') $P(\{f: f(x, y) + f(y, z) < r\}) \leqslant P(\{f: f(x, z) < r\})$ *oricare ar fi* x, y, $z \in S$, $r \in \mathbf{R}$.

Justificarea rezultă ușor din teorema 3.1.17 deoarece incluziunea $\{f: \xi_{x,x}(f) = 0\} \subseteq \{f: \xi_{x,x}(f) < r\} \in \mathcal{A}(X)$ implică c_1'). De asemenea $\mathbf{C}\{f: \xi_{x,y}(f) > 0\} = \{f: \xi_{x,y}(f) \leqslant 0\} \supseteq \{f: \xi_{x,y}(f) < r\} \in \mathcal{A}(X)$ și deci c_2') este evidentă. Pe de altă parte observația că dacă $P(E) = 1$ rezultă $P(E \cap A) = P(A)$ pentru orice $A \in \mathcal{A}(X)$ și din relația

$$\{f: \xi_{x,y}(f) < r\} \cap \{f: \xi_{x,y}(f) = \xi_{y,x}(f)\} =$$
$$= \{f: \xi_{y,x}(f) < r\} \cap \{f: \xi_{x,y}(f) = \xi_{y,x}(f)\}$$

rezultă c_3'). Condiția c_4') rezultă din relația

$$\{f: \xi_{x,y}(f) + \xi_{y,z}(f) < r\} \cap \{f: \xi_{x,y}(f) + \xi_{y,z}(f)\} \geqslant \{\xi_{x,z}(f)\} \subseteq \{f: \xi_{x,z}(f) < r\}$$

Observație. Condițiile c_1') — c_4') nu sînt suficiente pentru ca $(\mathbf{F}, \mathcal{A}(X), P)$ să fie o metrică în sensul lui Špaček, după cum rezultă din exemplul următor: fie $S = \{x, y, z\}$ și P_0 o probabilitate pe $\mathcal{A}(X)$ astfel că

$P_0(\{f: f(x, x) = 0\}) = P_0(\{f: f(y, y) = 0\}) = P_0(\{f: f(z, z) = 0\}) = 1$
$P_0(\{f: f(x, y) < t\}) = P_0(\{f: f(x, z) < t\}) = P_0(\{f: f(y, z) < t\}) = 1 - e^{-t}$

pentru $t \geqslant 0$ și zero în rest.

$P_0(\{f: f(x, y) < t_1\} \cap \{f: f(x, z) < t_2\} \cap \{f: f(y, z) < t_3\}) = P_0(\{f: f(x, y) < t_1\}) P_0(\{f: f(x, z) < t_2\}) P_0(\{f: f(y, z) < t_3\})$

adică relațiile c_1') — c_4') sînt verificate dar avem că

$$P_0(\{f: f(x, y) = f(y, x)\}) = 0$$

$$P_0(\{f: f(x, y) + f(y, z) \geqslant f(x, z)\}) = \frac{3}{4}$$

adică nu sînt verificate relațiile c_3) și c_4) din teorema 3.1.18 și $P_0(\mathbf{T}(S)) = 0$, adică avem o metrică cu probabilitatea zero.

A. Špaček [277] subliniind că proprietățile c_1') — c_4') asigură existența unei metrici în sensul lui Menger arată că acestea nu sînt suficiente pentru caracterizarea metricilor în sensul definiției 3.1.15. Acest fapt a sugerat lui K. Menger, B. Schweizer și A. Sklar [173] un studiu mai detaliat al conexiunilor dintre aceste noțiuni. Ei obțin

Teorema 3.1.19. *Dacă* $S = \{p, q\}$ *și distanța de la* p *la* q, *în metrica aleatoare a lui Špaček, este independentă de distanța de la* q *la* p, *atunci metrica probabilistă asociată este rigidă.*

Întrucît în spațiile S cu mai mult de două puncte se poate formula teorema de mai sus pentru fiecare pereche, prin adăugarea condiției ca pro-

Scanned with OKEN Scanner

babilitatea mulțimii metricilor care verifică inegalitatea triunghiului (în toate trei variantele impuse de absența simetriei) să fie 1, obținem

Teorema 3.1.20. *Dacă într-o metrică aleatoare în sensul lui Špaček se presupune că distanțele de la p la q și de q la p sînt independente pentru orice $p, q \in S$ atunci metrica probabilistă asociată este rigidă.*

Teorema 3.1.21. *La orice spațiu metric aleator în sensul lui Špaček îi corespunde fie o metrică probabilistă în care distanțele de la p la q și de la q la p sînt independente și rigide, fie nerigide dar complet dependente. Dacă există o corelație între ele aceasta va fi 1.*

În paragraful 1.7 se va vedea și legătura dintre spațiul Špaček și spațiul Šerstnev.

Aceste rezultate pun în evidență că este prea restrictivă condiția ca în mulțimea tuturor funcțiilor reale de două variabile, organizată ca σ-algebră, mulțimea metricilor să fie de probabilitate 1. Deci este natural ca axiomatica lui Menger care este mai largă să nu implice pe cea a lui Špaček care vizează o clasă mai restrînsă de spații probabiliste. Cu toate acestea Špaček [279] arată că nu este lipsit de interes studiul metricilor sale aleatoare, chiar și al celor degenerate (adică atunci cînd măsura de probabilitate a sa ia numai valorile unu sau zero). El arată că analogul algebric al probabilităților degenerate este acela de σ-ideal maximal și stabilește o corespondență între metricile rigide și mulțimea σ-idealelor maximale într-un spațiu cu măsură. Orice metrică pe o mulțime dată nu este altceva decît un σ-ideal într-o σ-algebră de părți ale mulțimii tuturor metricilor simple și reciproc. Deci orice metrică poate fi construită cu ajutorul unei metrici de o structură mai simplă sau altfel spus aproape orice proprietate neelementară a unui spațiu metric poate fi inclusă într-un procedeu de formare a σ-idealelor, adică un rezultat similar cu cel ce definește numerele reale cu ajutorul tăieturilor lui Dedekind. Deasemenea Špaček dă o teoremă de reprezentare a metricilor aleatoare în spațiul $\mathbf{C}$ al funcțiilor reale și continue pe un interval închis, în ipoteza $\text{card}(S) \leqslant 2^{\aleph_0}$, deci un rezultat analog teoremei lui Banach-Mazur. Un asemenea rezultat poate oferi noi metode de demonstrare și investigație în analiză și în teoria probabilităților care să evite dificultățile ce apar din cauza neseparabilității spațiului metric. Deasemenea menționăm rezultatele cu privire la diverse proprietăți ale produselor carteziene infinite de spații metrice aleatoare.

1.5. SPAȚIILE LUI O. ONICESCU, GENERALIZĂRI ȘI ALTE REZULTATE

Structurile probabiliste, a căror dezvoltare era în faza frămîntărilor de început, de clarificare a diferitelor conexiuni dintre anumite clase de spații, au constituit obiectul unor expuneri în cadrul seminarului de teoria probabilităților condus de acad. O. Onicescu, la Institutul de matematică al Academiei R.S.R. între anii 1960—1962 și care au stat la baza unor însemnate contribuții ale școlii românești de teoria probabilităților. Amintim în acest sens lucrările lui O. Onicescu [198], [204], G. Sâmboau și alții [230], [231], I. Săcuiu I. Văduva și alții [229], [287], sau începînd cu 1972, lucrările unui seminar ce-și desfășoară activitatea la Timișoara sub egida acad. O. Onicescu. Monografia lui O. Onicescu [198] a dat un impuls considerabil dezvoltării acestui domeniu, ideile ei fiind dezvoltate ulterior de alți matematicieni care au introdus noi concepte și puncte de vedere care se leagă mai mult de teoria proceselor stocastice.

1.5.1. Spațiile metrice aleatoare ale lui O. Onicescu. În monografia [198] O. Onicescu, după expunerea celor mai importante rezultate privind numerele

Scanned with OKEN Scanner

și șirurile aleatoare, structuri aleatoare, mersul la întîmplare, teoria ecuațiilor cu diferențe și procese multiplicative, face prima prezentare exhaustivă și ingenioasă privind ideile și deschiderile spre noi puncte de vedere ale teoriei structurilor metrice statistice sau aleatoare. Se sugerează noi căi de metrizare care permit o viziune integratoare a conceptului de număr aleator și de șir aleator, ca elemente ale unor spații care au toate caracteristicile spațiilor de tipul amintint.

O clasă de spații metrice aleatoare adecvată atît geometriei cît și teoriei probabilităților a fost introdusă de O. Onicescu prin

Definiția 3.1.15. Fie S o mulțime abstractă, $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate și $\mathcal{F}: S\times S \to \mathcal{L}^+$ o aplicație care asociază fiecărei perechi de puncte $p, q \in S$ o variabilă aleatoare $\delta_{pq}(\omega) \in \mathcal{L}^+ (\mathcal{L}^+ = \{X \in \mathcal{L}, X \geqslant 0\})$. Se numește *spațiu metric aleator de tip Onicescu* perechea $(S, \mathcal{F})$ pentu care sînt verificate axiomele:

1) $\delta_{pq}(\omega) = 0$ dacă și numai dacă $p = q$,
2) $\delta_{pq}(\omega) = \delta_{qp}(\omega)$,
3) $M(\delta_{pr}) \leqslant M(\delta_{pq}) + M(\delta_{qr})$

oricare ar fi $p, q, r \in S$ iar $M(.)$ însemînnd valoarea medie a cărei existență este justificată de aceleași motive pentru care, în general, se presupune existența valorii medii pentru variabilele aleatare ce au o semnificație fizică directă, măsurabilă.

Acest punct de vedere pune în evidență mult mai pregnant restricția ce o impune axioma triunghiului dată de Wlad și în consecință particularitatea spațiilor Wald.

Cu privire la conexiunea dintre spațiile lui Onicescu și spațiile Menger observăm că avem

$$F_{pq}(x) = P(\{\omega: \delta_{pq}(\omega) < x\})$$

pe cîmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, care, dacă nu este precizat, această expresie are numai înțeles pur empiric.

Ca exemple simple pot fi amintite spațiile metrice aleatoare echilaterale luînd

$$\delta_{pq}(\omega) = f(\omega) \text{ pentru } p \neq q,\ f(\omega) \in \mathcal{L}^+ \text{ și } \delta_{pq} = 0$$

Un spațiu metric aleator asociat unui spațiu metric dat (S, d) se poate defini alegînd $\delta_{pq}(\omega) = d(p, q)\, f(\omega)$.

În [124] se introduce conceptul de spațiu metric aleator nearhimedian ca fiind orice pereche $(S, \mathcal{F})$ unde $\mathcal{F}: S\times S \to \mathcal{L}^+$ verifică condițiile 1) și 2) din definiția 3.1.16 și 3') $M(\delta_{pr}) \leqslant \mathrm{Max}(M(\delta_{pq}), M(\delta_{qr}))$ oricare ar fi $p, q, r \in S$.

O topologie aleatoare compatibilă cu structura de spațiu metric aleator pe spațiul variabilelor aleatoare $L^1(\Omega)$ a fost introdusă de O. Onicescu utilizînd probablitatea condiționată $\Phi_{XY}(A) = P(Y(\omega) \in A / X(\omega) \in A)$, unde A este orice mulțime boreliană din $\mathbf{R}$ pentru care $P(X(\omega) \in A) \neq 0$. O vecinătate a lui $X(\omega)$ va fi o mulțime de forma $\{Y(\omega): \Phi_{XY}(A) < \varepsilon\}$ pentru orice mulțime boreliană $A \subseteq \mathbf{R}$ pentru care $P(\{\omega: X(\omega) \in A\}) \neq 0$.

Dacă $V \subseteq L^1(\Omega)$ este o parte topologic aleatoare, în sensul amintit mai sus, despre care se presupune că este local compactă în sensul că din orice mulțime infinită inclusă într-o vecinătate a punctului generic $X(\omega)$ se poate extrage un șir $\{Y_n(\omega)$ care are o limită $Y(\omega)$ adică $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)$ dacă

(1) $$\lim_{n\to\infty} \Phi_{YY_n}(A) = 1, \text{ oricare ar fi } A \in \mathcal{B}|^1.$$

Se arată că structura topologică a lui V este compatibilă cu cea de spațiu metric aleator, dacă se ia ca distanță între X și Y variabila aleatoare $\delta_{XY}(\omega) = |X(\omega) - Y(\omega)|$

Se verifică ușor că aceasta este o metrică aleatoare care în plus este continuă în probabilitate.

Este suficient să arătăm că dacă $\lim_{n\to\infty} \Phi_{XY_n}(A) = 1$ pentru orice $A \subseteq \mathcal{B}^1$ atunci $\delta_{XY_n}(\omega) \to 0$ în probabilitate. De altfel convergența dată de (1) este echivalentă cu convergența în probabilitate după cum ușor se poate urmări raționamentul din [198, pag. 215].

Pe V se poate defini și o metrică numerică prin $d(X, Y) = \int_\Omega \delta_{XY}(\omega)\, dP(\omega)$.

Ocupîndu-ne pe scurt de rezultatele de bază ale acad. O. Onicescu din [198] în teoria structurilor aleatoare amintim că ideea de mai sus este extinsă și la spații metrice abstracte (S, d) în locul spațiului euclidian $\mathbf{R}$ pentru ca apoi, în paragraful consacrat spațiilor aleatoare speciale, să se revalorifice spațiul Gauss-Wiener, spațiul Wiener, spațiile Green și Doob sau varietățile riemanniene aleatoare integrîndu-le în teoria unitară a structurilor aleatoare. Aceste rezultate au dat un nou impuls analizei structurilor aleatoare constituindu-se ca sursă de bază pentru noi generalizări și teorii cărora le este tributar acest nou domeniu al teoriei probabilităților.

Ne ocupăm în cele ce urmează de acele structuri aleatoare strîns legate de punctul de vedere introdus de O. Onicescu.

1.5.2. Structuri aleatoare în sensul lui Sâmboan și alții [231], [230]. Pornind de la un spațiu arbitrar S, o operație „$\top$" pe $[0, \infty)$, comutativă, monotonă și avînd pe 1 ca element neutru iar $\Phi: S \times S \to L^r(\Omega, \mathcal{K}, P)$ cu propretățile :

a) pentru orice $(x, y) \in S \times S$, $\Phi((x, y)) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$,

b) pentru orice $(x, y) \in S \times S$, $\Phi((x, y)) = \Phi((y, x))$,

c) pentru orice $x, y, z \in S$, $M(|\Phi(x, y)|^r) \top M(|\Phi(y, z)|^r) \geqslant M(|\Phi((x, z))|^r)$

în [230] se construiesc structuri uniforme metrizabile pe A cu ajutorul unor structuri topologice din spațiile de variabile aleatoare.

În $L^p(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se identifică funcțiile egal aproape peste tot și se notează $\Phi((x, y)) = X_{xy}$.

Propoziția 3.1.14. *Familia* $U(\varepsilon) = \{(x, y): M(|X_{xy}|^r < \varepsilon, \varepsilon > 0, \varepsilon > 0\}$ *de mulțimi din* $S \times S$ *formează o bază de împrejurimi a unei structuri uniforme separate* $\mathcal{U}$ *pe* S *dacă* $\inf_{a>0} a \top a = 0$.

Într-adevăr din a) rezultă că $D \subseteq U(\varepsilon)$ pentru orice $\varepsilon > 0$ iar b) implică $U^{-1}(\varepsilon) = U(\varepsilon)$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Din $\inf_{a>0} a \top a = 0$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există a_ε astfel încît $a_\varepsilon \top a_\varepsilon < \varepsilon$ și dacă $(x, z) \in U(a_\varepsilon) \circ U(a_\varepsilon)$ atunci există $y \in S$ astfel că $(x, y) \in U(a_\varepsilon)$ și $(y, z) \in U(a_\varepsilon)$; din c) și din monotonia și existența elementului neutru 1 față de $\top$ deducem că

$$M(|X_{xz}|^r) \leqslant (M(|X_{xy}|^r)) \top (M(|X_{yz}|^r)) < a_\varepsilon \top a_\varepsilon < \varepsilon$$

adică $(x, z) \in U(\varepsilon)$. Deci $U(a_\varepsilon) \circ U(a_\varepsilon) \subseteq U(\varepsilon)$.

Separabilitatea structurii $\mathcal{U}$ rezultă din faptul că pentru orice $(x, y) \in S \times S$ există o împrejurime $U(\varepsilon_0)$ astfel încît $(x, y) \notin U(\varepsilon_0)$ căci din a) rezultă că pentru $x \neq y$ există ε_0 astfel încît $M(|X_{xy}|^r) \geqslant \varepsilon_0$.

Să observăm că structura uniformă $\mathcal{U}$ avînd o bază numărabilă, S este un spațiu metrizabil.

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 3.1.15. *Dacă* $T = \text{Min}$ *atunci familia* $\mathcal{W} = \{W(\varepsilon),\ \varepsilon > 0\}$ *de părți ale lui* $S \times S$ *unde* $W(\varepsilon) = \{(x, y): M(|X_{xy}|^r < \varepsilon\}$ *este o bază de uniformități nearhimediene pe* S *mai tare decît* $\mathcal{U}$ *din teorema* 3.1.8.

Demonstrație. Se verifică ușor că $\mathcal{W}$ este o bază de uniformități și ne ocupăm numai de condiția $W(\varepsilon) \circ W(\varepsilon) \subseteq W(\varepsilon)$. În adevăr, dacă $(x, y) \in W(\varepsilon)$, $(y, z) \in W(\varepsilon)$ atunci din c) deducem că $M(|X_{xz}|^r) \leqslant (M(|X_{xy}|^r)) \top (M(|X_{yz}|^r)) < \varepsilon \top (\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon$ și deci $(x, z) \in W(\varepsilon)$.

Faptul că este mai fină decît $\mathcal{U}$, din teorema 3.1.8, rezultă din observația că dacă luăm în propoziția 2.1.4 $g(x) = |x|^r$ atunci avem $P(\{\omega: |X_{xy}(\omega)|^r \geqslant \varepsilon\}) \leqslant M(|X_{xy}(\omega)|^r)/\varepsilon^r$ din care deducem că $M(|X_{xy}(\omega)|^r) \geqslant \varepsilon^r(1 - F_{xy}(\varepsilon))$ ceea ce este echivalent cu faptul că $W(\varepsilon^r \lambda) \subseteq U(\varepsilon, \lambda)$ și propoziția este demonstrată.

Acest raționament are loc și pentru structura uniformă din propoziția 3.1.14 obținîndu-se că aceasta este mai fină decît cea din teorema 3.1.7.

Dacă se i în locul lui Φ aplicația $\Psi: S \times S \to L^2(\Omega, \mathcal{K}, P)$ cu proprietățile a), b) și

c') pentru orice $x, y, z \in S$, $M(X_{xy}X_{yz}) = M(X_{xz})$

atunci introducînd familia de mulțimi $W(\varepsilon) = \{(x, y): M(|X_{xy}|^2) < \varepsilon),\ \varepsilon > 0\}$, definește o bază de împrejurimi ale unei structuri uniforme separate $\mathcal{W}$ pe S căci atunci rolul lui c) este jucat de inegalitatea lui Schwarz. De altfel axiomele spațiului Menger $(S, \Phi, \top)$ dat cu ajutorul reprezentării $\Phi: S \times S \to \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{K}, P)$, $\Phi(x, y) = X_{xy}$ devin

1) $X_{xy} = 0$ dacă și numai dacă $x = y$,
2) $X_{xy} \geqslant 0$,
3) $X_{xy} = X_{yx}$,
4) $P(X_{xy} < a + b) \geqslant P(X_{xz} < a) \top P(X_{zy} < b)$.

Notînd în $\mathcal{L}$ prin $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}(\varepsilon, \lambda),\ \varepsilon > 0,\ \lambda > 0\}$, $\widetilde{U}(\varepsilon, \lambda) = \{X: P(|X| < \varepsilon) > 1 - \lambda\}$ atunci cu ajutorul lui 4) se demonstrează că $\widetilde{U}$ definește o bază pentru filtrul vecinătăților originii în $\mathcal{L}$ care induce o bază de împrejurimi $\mathcal{U}$ în $S \times S$ dată de $\Phi^{-1}(\widetilde{\mathcal{U}})$.

Aceste idei se extind și la cazul cînd $\mathbf{G}$ este un grup topologic separat în care prin $\widetilde{\mathcal{U}}$ se notează familia vecinătăților $\widetilde{U}$ ale elementului neutru 0 și $\Psi: S \times S \to \mathbf{G}$ cu proprietățile

1°) $u_{xy} = 0$ dacă și numai dacă $x = y$,
2°) $u_{xy} = u_{yx}$,
3°) Pentru orice $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$ există $\widetilde{U}' \in \widetilde{\mathcal{U}}$ astfel că din $u_{xz} \in \widetilde{U}'$, $u_{zy} \in \widetilde{U}'$ rezultă $u_{xy} \in \widetilde{U}$.

Deducem că familia mulțimilor $U = \{(x, y): u_{xy} \in \widetilde{U},\ \widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}\}$ formează o bază pentru filtrul împrejurimilor ce definesc o structură separată uniformă pe S. Cînd $\mathbf{G}$ admite o bază numărabilă de vecinătăți ale elementului neutru rezultă și metrizabilitatea structurii uniforme pe $S \times S$.

Aceste rezultate au sugerat

Definiția 3.1.16. Fiind dat un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ și $\mathbf{G} \subseteq \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un subgrup topologic separat, se numește *spațiu statistic* tripletul $(S, \Psi, \mathbf{G})$.

Evident că dacă filtrul vecinătăților elementului neutru din $\mathbf{G}$ are o bază numărabilă acest spațiu statistic este metrizabil.

Acest concept cuprinde spațiile Menger (deci și spațiile Wald), spațiile metrice obișnuite și pe cele din prima parte a acestui subparagraf deoarece

Scanned with OKEN Scanner

luînd spațiile Menger $(S, \Phi, \top)$ în care $\sup_{a<1} a \top a = 1$ atunci $\tilde{U}(\varepsilon, \lambda) = \{X: X \geqslant 0,\ P(X < \varepsilon) > 1 - \lambda\}$ formează o bază a filtrului vecinătăților originii în $\mathcal{E}$. Verificarea axiomelor 1° și 2° este imediată iar 3° rezultă alegînd un λ' astfel că $(1 - \lambda') \top (1 - \lambda') > 1 - \lambda$, $\tilde{U} = \tilde{U}(\varepsilon, \lambda)$, $\tilde{U}' = \tilde{U}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \lambda'\right)$ atunci dacă $X_{xz} \in \tilde{U}'$, $X_{zy} \in \tilde{U}'$ avem că $P\left(X_{xz} < \frac{\varepsilon}{2}\right) > 1 - \lambda'$ și $P\left(X_{zy} < \frac{\varepsilon}{2}\right) > 1 - \lambda'$ iar din proprietatea lui $\top$ și din (IV_m) deducem

$$P(X_{xy} < \varepsilon) \geqslant P\left(X_{xz} < \frac{\varepsilon}{2}\right) \top P\left(X_{zy} < \frac{\varepsilon}{2}\right) > (1 - \lambda') \top (1 - \lambda') > 1 - \lambda.$$

În mod analog dacă (S, d) este un spațiu metric obișnuit, luînd $\Phi(x, y) = X_{xy} = d(x, y)$ se obține o structură de tipul amintit.

Observație. Dacă 3) se modifică ușor cerînd ca pentru orice $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$ cu $u_{xy} \in \tilde{U}$, $u_{yz} \in \tilde{U}$ să rezulte $u_{xz} \in \tilde{U}$ deducem că $\mathcal{U} = \{(x, y): u_{xy} \in \tilde{U},\ \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}\}$ definește o bază de uniformități Hausdorff nearhimediană pe S.

1.5.3. Spații proximal-aleatoare. [51] Fie S o mulțime arbitrară, $\mathcal{P}(S)$ familia părților sale iar $\varnothing$ partea vidă. Dacă α este o relație pe $\mathcal{P}(S)$ vom scrie că $A \alpha B$ pentru $(A, B) \in \alpha$ și $A \bar{\alpha} B$ pentru $(A, B) \notin \alpha$. Se știe [44] că o relație α pe $\mathcal{P}(S)$ se numește *semiproximitate* pe S dacă

P_1) $\varnothing \bar{\alpha} S$,

P_2) $A \alpha B$ dacă și numai dacă $B \alpha A$,

P_3) $A \alpha (B \cup C)$ dacă și numai dacă $A \alpha B$ sau $A \alpha C$,

P_4) $A \cap B \neq \varnothing$ implică $A \alpha B$.

O semi-proximitate pentru care are loc

P_5) Dacă $A \bar{\alpha} B$ atunci există o parte $E \subseteq S$ astfel ca $A \bar{\alpha} E$ și $B \bar{\alpha} CE$. $(CE = S - E)$

se numește *proximitate*.

Dacă α satisface condiția

P_6) $\{p\} \alpha \{q\}$ implică $p = q$ pentru orice $p, q \in S$,

atunci α se numește separată.

Fie $\mathbf{G}$ un grup topologic și $\mathcal{N}$ sistemul vecinătăților elementului neutru $0 \in \mathbf{G}$ iar prin $\bar{A}$ notăm închiderea lui $A \subseteq \mathbf{G}$. Se știe că $\mathbf{G}$ este separat dacă și numai dacă mulțimea $\{0\}$ este închisă și că $\mathbf{G}$ este metrizabil dacă și numai dacă $\mathcal{N}$ are o bază numărabilă.

Fie $\mathcal{F}: S \times S \to \mathbf{G}$ astfel că

PA_1) $\mathcal{F}(p, q) = 0$ dacă și numai dacă $p = q$,

PA_2) $\mathcal{F}(p, q) = \mathcal{F}(q, p)$ pentru orice $p, q \in S$,

Dacă A și B sînt părți din S atunci notăm prin $\mathcal{F}(A, B) = \{\mathcal{F}(p, q) \cdot p \in A,\ q \in B\}$ și dăm

Definiția 3.1.17. Se numește spațiu *proximal-aleator* (PA — spațiu) un cvadruplu $(S, \alpha, \mathcal{F}, \mathbf{G})$ cu proprietatea

PA_3) $A \alpha B$ dacă și numai dacă $0 \in \overline{\mathcal{F}(A, B)}$ unde α este o semi-proximitate pe S.

Cu privire la conexiunea dintre anumite clase de structuri probabiliste și PA — spații avem

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.1.22. *Orice spațiu metric statistic este un PA — spațiu.*

Demonstrație. Fie **G** familia variabilelor aleatoare pe un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ înzestrată cu convergența în repartiție.
Să definim

$$\mathcal{F}(p, q) = X_{pq} \in \mathbf{G}$$

iar prin F_{pq} funcția de repartiție corespunzătoare lui X_{pq}.

Mai întîi facem observația că relația α definită pe $\mathcal{P}(S)$ prin „$A \alpha B$ dacă și numai dacă pentru orice ε, $\lambda \in \mathbf{R}$ există elementele $p \in A$ și $q \in B$ astfel încît $F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda$" este o semiproximitate pe S.

Evident că PA_1) și PA_2) sînt verificate și să arătăm că și PA_3) are loc. Pentru aceasta observăm că dacă $0 \in \overline{\mathcal{F}(A, B)}$ atunci există un șir $X_{p_nq_n}$ în $\mathbf{G}(p_n \in A,\ q_n \in B)$ astfel că $X_{p_nq_n}$ converge la 0. Aceasta implică existența unui rang n_0 astfel încît oricare ar fi $\varepsilon > 0$ și $\lambda > 0$ să avem $F_{p_nq_n}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ pentru orice $n \geqslant n_0$, ceea ce implică $A \alpha B$.

Reciproc, fie $A \alpha B$ și n un întreg pozitiv, atunci există $p_n \in A$ și $q_n \in B$ astfel încît să avem $F_{p_nq_n}\left(\frac{1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n}$.

Pe de altă parte oricare ar fi x și λ numere reale pozitive rezultă că există un număr natural n_0 astfel încît $\frac{1}{n_0} < x$ și $1 - \frac{1}{n_0} > 1 - \lambda$. Atunci oricare ar fi numărul natural n, $n \geqslant n_0$ avem că

$$F_{p_nq_n}(x) \geqslant F_{p_nq_n}\left(\frac{1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n} > 1 - \lambda$$

ceea ce este echivalent cu faptul că $X_{p_nq_n} \to 0$, $n \to \infty$ adică $0 \in \overline{\mathcal{F}(A, B)}$ și teorema este demonstrată.

Teorema 3.1.23. *Orice spațiu statistic în sensul definiției* 3.1.16 *este un PA — spațiu.*

Demonstrație. Am văzut că $\mathcal{U} = \{U_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ unde $U_V = \{(p, q) \in S \times S,\ \mathcal{F}(p, q) \in V\}$ definește o uniformitate pe S. Fie α semi-proximitatea pe S indusă de $\mathcal{U}$ definită prin: $A \alpha B$ dacă și numai dacă $U_V(A) \cap B \neq \varnothing$ pentru orice $V \in \mathcal{M}$.

Să verificăm că PA_3) are loc. În acest scop observăm că dacă avem $A \alpha B$ atunci $U_V(A) \cap B \neq \varnothing$ implică existența unui $p \in A$ și $q \in B$ astfel că $(p, q) \in U_V$ sau $\mathcal{F}(p, q) \in V$. Deducem că pentru fiecare $V \in \mathcal{M}$ avem că $\mathcal{F}(A, B) \cap V \neq \varnothing$ ceea ce implică $0 \in \overline{\mathcal{F}(A, B)}$.

Reciproc, dacă $0 \in \mathcal{F}(A, B)$ atunci pentru orice $V \in \mathcal{M}$ avem că $F(A, B) \cap V \neq \varnothing$ ceea ce este echivalent cu existența a cel puțin două elemente $p \in A$ și $q \in B$ astfel încît $\mathcal{F}(p, q) \in V$ ceea ce implică $(p, q) \in U_V$ și deci $U_V(A) \cap B \neq \varnothing$ adică $A \alpha B$. Întrucît primele două condiții din definiția 3.1.16 a spațiilor statistice sînt chiar PA_1) și PA_2), teorema este demonstrată.

Pentru a aborda anumite probleme de topologie implicate de proximități să notăm cu $\mathcal{T}$ topologia pe S indusă de o operatorul de închidere $A \to \{p \in S,\ \{p\} \alpha A\}$ care se știe că este uniformizabilă cînd α este proximitate.

Dacă **G** este separat se arată ușor că α este separată adică $\{p\} \alpha \{q\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 \in \overline{\mathcal{F}(p, q)} \Leftrightarrow \mathcal{F}(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$. Vom avea

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.1.24. *Topologia* τ *este mai slabă decît topologia indusă de aplicația* $f_q: S \to \mathbf{G}$, $f_q(p) = \mathcal{F}(p, q)$.

Demonstrație. Se știe că $\check{\tau}$ este cea mai slabă topologie pe S cu proprietatea că toate aplicațiile f_q sînt continue. Deasemenea este uniformizabilă și este dată de cea mai slabă uniformitate pe S pentru care f_q sînt uniform continue.

Fie $A \in \tau$ și $\{p_i\}$ un șir generalizat din complementara $\mathbf{C}A$ a lui A. Să presupunem că $\{p_i\}$ converge către p în topologia $\check{\tau}$. Atunci avem că $\mathcal{F}(p_i, p)$ converge către $\mathcal{F}(p, p) = 0$ în $\mathbf{G}$ adică $0 \in \overline{\mathcal{F}(p, \mathbf{C}A)}$ ceea ce implică $\{p\} \alpha CA$ de unde rezultă că $p \in CA$. Prin urmare $\{p_i\}$ nu poate converge la un punct din A ceea ce înseamnă că $A \in \check{\tau}$ și A fiind arbitrară rezultă că $\tau \subset \check{\tau}$.

Observație. Dacă G este separată atunci $\check{\tau}$ este separată.

În adevăr dacă $p \neq q$ avem că $\mathcal{F}(p, q) \neq 0$. Fie V_0 și V_{pq} vecinătăți ale lui 0 și $\mathcal{F}(p, q)$ în $\mathbf{G}$. Din continuitatea lui $f_q(r) = \mathcal{F}(r, p)$ în $r = p$ și $r = q$ se obțin două vecinătăți disjuncte ale lui p și q.

Fie $(S, \alpha, \mathcal{F}, G)$ un PA — spațiu și să presupunem că $\mathbf{G}$ este metrizabil. Fie $\{V_n\}$ o bază numărabilă pentru $\mathcal{N}$. Vom avea

Teorema 3.1.25. *Dacă* $(S, \check{\tau})$ *este compact atunci el este și metrizabil.*

Demonstrație. Întrucît $f_q(p) = \mathcal{F}(p, q)$ este continuă în q rezultă că pentru orice număr întreg și pozitiv k există o vecinătate deschisă $U_k(q)$ astfel că $U_k(q) \subset f_q^{-1}(V_k)$. Fie q_k un șir convergent către q în topologia $\check{\tau}$. Dacă $p \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f_{q_k}^{-1}(V_k)$ atunci pentru fiecare k, $f_{q_k}(p) \in V_k$ ceea ce este echivalent cu convergența $\mathcal{F}(q_k, p) \to 0$ în $\mathbf{G}$. Dar $\mathcal{F}(q_k, p) \to \mathcal{F}(q, p)$, $k \to \infty$, ceea ce implică $\mathcal{F}(p, q) = 0$ și deci $p = q$. Din relația $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k(q_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} f_{q_k}^{-1}(V_k)$ avem că $\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k(q_k)$ conține cel mult un punct. Atunci $(S, \check{\tau})$ este metrizabil [155].

Corolar. *Dacă* $(S, \check{\tau})$ *este compact și* (S, τ) *este separat atunci* (S, τ) *este compact și metrizabil.*

În adevăr, cum $\tau \subset \check{\tau}$ considerînd aplicația identică $f: (S, \check{\tau}) \to (S, \tau)$ vom obține că f este homemorfism.

În [216] se arată că produsul cartezian al unei familii finite sau numărabile de PA — spații este un PA — spațiu iar topologia indusă de proximitatea produs este echivalentă cu produsul topologiilor induse de proximitățile respective.

În [149] se introduce noțiunea de proximitate stocastică prin generalizarea la PM — spații a proximității definită cu ajutorul extensiei canonice a unei metrici d pe S, la mulțimea părților $\mathcal{P}(S)$. Se arată incluziunea spațiilor cu proximitate și a spațiilor Menger în clasa spațiilor cu proximitate stocastică. De asemenea se stabilește o legătură între spații cu proximitate stocastică și spații topologice probabiliste în sensul lui M. J. Frank [80].

În [67] se studiază în esență aceleași probleme ca și în [149] utilizîndu-se termenul de spațiu cu proximitate statistică și se definește $A \, \delta \, B$ prin proprietatea că pentru orice $x > 0$, există $p \in A$ astfel ca $F_{pq}(x) \neq 0$, $q \in B$ iar în [149] se ia $A \, \delta_\lambda \, B$ cînd $\inf_{x>0} \sup_{p \in A, \, q \in B} F_{pq}(x) > \lambda$, $\lambda \in [0, 1]$

1.5.4. Spațiile metrice probabiliste generalizate în sensul lui Istrătescu. Fiind dat un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ și o aplicație arbitrară $f: \Omega \to E$

Scanned with OKEN Scanner

se consideră funcția de probabilitate $P^{(f)}$ pe mulțimea arbitrară E pe care se presupune dată și o altă măsură de probabilitate μ. Vom avea

Definiția 3.1.18. [122] Fie S o mulțime abstractă iar P^f o familie de funcții de probabilitate pe E. Se numește spațiu metric probabilist generalizat un sistem $\{S, P^f, E, \mu\}$ despre care se presupune că există o aplicație $\mathcal{F}: S \times S \to P^f$ care posedă următoarele proprietăți:

1) Notînd $\mathcal{F}(p, q) = P^f_{pq}$ avem pentru orice $A \subseteq E$ cu proprietatea $\mu(A) > 0$, $P^f_{pq}(A) = 1$ dacă și numai dacă $p = q$,

2) $P^f_{pq} = P^f_{qp}$,

3) $\mu(A) = 0 \Rightarrow P^f_{pq}(A) = 0$,

4) $P^f_{pq}(A) = 1$, $P^f_{qr}(B) = 1$ implică $P^f_{pr}(A \cup B) = 1$.

Spre exemplu dacă se consideră grupul $\mathbf{G} = \mathbf{R}$ și funcția $u: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $u(x) = v(x)$ pentru $x > 0$ și $u(x) = 0$ pentru $x \leqslant 0$ unde v este o funcție strict crescătoare cu valori în $[0, 1]$, u poate fi măsura exterioară generată de u.

Dacă în locul axiomei 4) avem

$$(4_m) \qquad P^f_{pr}(A \cup B) \geqslant T(P^k_{pq}(A), P^f_{qr}(B))$$

unde T este 0 t-normă, se spune că avem un spațiu Menger generalizat și avem

Teorema 3.1.26. *Dacă $\{S, P^f, E, \mu\}$ este un spațiu Menger generalizat pentru $T = Max$ atunci S nu conține puncte distincte.*

Demonstrație. Dacă presupunem că ar exista $p, q \in S$, $p \neq q$ iar A, B două mulțimi cu proprietățile $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, $B \subset A$ și $\mu(A - B) > 0$ atunci am avea $P^f_{pq}(A) \geqslant \text{Max}\,(P^f_{pq}(A - B), P^f_{qq}(B)) = 1$. Cum A este arbitrară rezultă că $p = q$ adică o contradicție.

Teorema 3.1.27. *Dacă $\{S, P^f, E, \mu\}$ este un spațiu Menger generalizat în raport cu t-norma T, atunci există $a \in (0, 1)$ astfel încît $T(a, 1) \leqslant a$ iar în cazul cînd T este continuă avem că pentru orice A cu $\mu(A) > 0$, este verificată relația $T(P^f_{pq}(A), 1) \leqslant P^f_{pq}(A)$.*

O generalizare naturală a spațiilor Wald se obține dacă se ia E un grup abelian local compact înzestrat cu două măsuri μ și ν și se definește $(\mu * \nu)(A) = (\mu \times \nu)(A_2)$ unde $A_2 = \{(x, y): x + y \in A\}$ și $\mu \times \nu$ este măsura produs obișnuită pe $E \times E$. Vom avea

Definiția 3.1.19. Se numește spațiu Wald generalizat sistemul $\{S, P^f, E, \mu\}$, unde E este un grup abelian local compact, sînt verificate axiomele 1) — 3) din definiția de mai sus și

$$(4_w) \qquad P^f_{pq}(A) \geqslant (P^f_{pr} * P^f_{rq})(A)$$

pentru orice $A \subseteq E$, $\mu(A) > 0$ iar $p, q, r \in S$.

Evident avem și în acest caz rezultatele obișnuite: orice spațiu Wald generalizat este un spațiu Menger generalizat cu $T = \text{Prod}$; axioma (4_w) implică axioma 4), adică $p, q, \mu \in S$ nu sînt toate distincte are loc întotdeauna (4_w) și dacă (4_m) are loc pentru $T = \text{Max}$ atunci $\{S, P^f, E, \mu\}$ este un spațiu Wald.

1.6. *PM*-SPAȚII METRIC-GENERATE, E-SPAȚII ȘI ALTE CLASE DE SPAȚII METRICE ALEATOARE

1.6.1. Considerații generale asupra PM-spațiilor metric-generate. Pornind de la observația restricției, impusă de Špaček asupra mulțimii **M** a metricilor definite pe $S \times S$, de a avea $\mu(\mathbf{M}) = 1$, care restrînge generalitatea metricilor

aleatoare induse, R. Stevens propune o cale de slăbire a condițiilor respective [267].

Definiția 3.1.20. Spunem că un PM-spațiu, $(S, \mathcal{F})$ este *metric-generat* dacă există o familie de metrici $\mathcal{D}$ pe S și o măsură μ pe $\mathcal{D}$ (adică pe o σ-algebră $\mathcal{B}$ de părți ale lui $\mathcal{D}$) astfel încît să avem

1) $\mu(\mathcal{D}) = 1$,

2) Pentru orice $p, q \in S$ și orice $x \in \mathbf{R}$ mulțimea $\{d \in \mathcal{D}: d(p, q) < x\}$ este μ-măsurabilă (adică $d_{pq} = d(p, q): \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ este o variabilă aleatoare pe $\mathcal{D}$)

3) $\mathcal{F}(p, q)(x) = F_{pq}(x) = \mu(\{d \in \mathcal{D}: d(p, q) < x\})$ pentru orice $p, q \in S$ și $x \in \mathbf{R}$.

Teorema 3.1.28. *Dacă $(S, \mathcal{F})$ este un PM-spațiu metric-generat, atunci el este un spațiu Menger relativ la t-norma T_m și orice funcție de repartiție F_{pq}, $p \neq q$ este continuă în zero.*

Demonstrație. Fie $p, q, r \in S$ și $x, y > 0$ și să notăm prin $E_1 = \{d: d(p, q) < x\}$, $E_2 = \{d: d(q, r) < y\}$, $E_3 = \{d: d(p, r) < x + y\}$ atunci, din faptul că $d(p, r) \leqslant d(p, q) + d(q, r)$ rezultă că $E_1 \cap E_2 \subseteq E_3$ și $0 \leqslant F_{pr}(x + y) = \mu(E_3) \geqslant \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cup E_2) = F_{pq}(x) + F_{qr}(y) - \mu(E_1 \cup E_2) \geqslant F_{pq}(x) + F_{qr}(y) - 1$ și prima parte este demonstrată.

Pentru partea a doua să observăm că oricare ar fi șirul $\{x_n\}$ de numere reale pozitive, descrescător și convergent către zero, dacă notăm prin $E_n = \{d: d(p, q) < x_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, atunci $\lim_{n \to \infty} E_n = \varnothing$ și întrucît $\mu(E_1) < \infty$ rezultă că $\lim_{n \to \infty} F_{pq}(x_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \mu(\varnothing) = 0 = F_{pq}(0)$ care împreună cu faptul că $F_{pq}(x) = 0$ pentru $x \leqslant 0$ arată că F_{pq} este continuă în zero.

Se arată că acesta este cel mai bun rezultat posibil în sensul că pentru orice T, $T > T_m$, există un PM-spațiu metric-generat care nu este Menger relativ la T și în care $\mathcal{F}$ este astfel încît F_{pq}, $p \neq q$, sînt continue [267, Th. 3]. Nu insistăm asupra demonstrațiilor lui Stevens întrucît ele au fost expuse în [124], însă amintim că și problema inversă are răspunsuri corespunzătoare în sensul că orice spațiu Menger față de $T = \min$ și în care F_{pq}, $p \neq q$, este continuă este un spațiu metric-generat [267], Th. 10]. Acest rezultat este de asemenea cel mai bun posibil în sensul că pentru orice t-normă continuă T, $T < \min$, se pot găsi spații Menger cu F_{pq}, $p \neq q$, continue care nu sînt metric-generate [267 Th. 11]. Totuși pentru spațiile simple generate de un (S, d) și $\mathbf{G}$, continuitatea lui $\mathbf{G}$ în zero este condiție necesară și suficientă pentru ca $(S, \mathcal{F})$ să fie PM-spațiu simplu generat [267, Th. 7].

1.6.2. E-spațiile introduse de H. Sherwood. Această clasă generalizează pe cea introdusă de R. Stevens avînd însă o legătură strînsă cu ideea care stă la baza acesteia.

Definiția 3.1.21. O pereche $(S, \mathcal{F})$ se numește E-spațiu pe un spațiu metric (M, d) dacă elementele lui S sînt funcții pe un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ cu proprietatea că $\{t \in \Omega: d(p(t), q(t)) < x\} \in \mathcal{K}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ și $p, q \in S$ iar $F_{pq}(x) = P(\{t \in \Omega: d(p(t), q(t)) < x\})$, elementele din S considerîndu-se nedistincte dacă coincid pe complementara unei mulțimi de măsură P-nulă.

De obicei se consideră spațiul canonic asociat presupunîndu-se că dacă $p, q \in S$ și există t astfel încît $p(t) \neq q(t)$ atunci $p(t) \neq q(t)$ pe o mulțime de măsură P pozitivă.

Vom avea

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.1.29. *Orice E-spațiu* $(S, \mathcal{F})$ *pe un spațiu metric* (M, d) *este un spațiu Menger relativ la t-norma* T_m.

În [258, Th. 3] se arată că orice PM-spațiu metric-generat este izometric cu un E-spațiu dar există E-spații care nu sînt metric-generate.

Definiția 3.1.22. Un PM-spațiu pentru care există un cîmp de probabilitate $(\mathcal{D}, \mathcal{B}, \mu)$ care satisface condițiile: 1') $\mathcal{D}$ este o familie de pseudometrici pe S și condițiile 2) și 3) din definiția 3.1.21, se numește *pseudometric-generat*.

Se obține o nouă clasă de PM-spații care conține E-spațiile pentru că avem

Teorema 3.1.30. [258] *Orice PM-spațiu este pseudometric-generat dacă și numai dacă este izometric cu un E-spațiu.*

Teorema 3.1.31. [258] $(S, \mathcal{F})$ *este un spațiu* ω *— consistent generat de repartiții pe* $\mathbf{R}^n$ *dacă și numai dacă el este izometric cu un E-spațiu pe* $\mathbf{R}^n$ *(cu metrica euclidiană), fiecare punct al E-spațiului fiind un vector aleator n-dimensional.*

În [195] se demonstrează că orice spațiu Menger cu $T = \text{Min}$ este un PM-spațiu pseudometric-generat iar cînd F_{pq}, $p \neq q$, sînt continue $(S, \mathcal{F})$ este metric-generat.

1.6.3. Spații semimetrice aleatoare și uniform aleatoare în sensul lui P. Calabrese. În această nouă abordare se asociază la fiecare pereche $(p, q) \in S \times S$, în locul funcțiilor de repartiție, variabile aleatoare reale X_{pq} pe un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Interpretarea lui $X_{pq}(\omega)$ va fi aceea de „distanță" între p și q la „momentul ω". Fiecare X_{pq} are o funcție de repartiție ce poate fi identificată cu F_{pq} din abordarea lui Menger. Analog fiecare n-uplu $\alpha = (p_1 q_1, \ldots, p_n q_n)$ de elemente din $S \times S$ determină un vector aleator $X_\alpha = (X_{p_1 q_1}, \ldots, X_{p_n q_n})$ și o funcție de repartiție comună F_α. Prin urmare, acest punct de vedere extinde ideea care a stat la baza spațiilor lui O. Onicescu.

Această abordare permite investigarea unor probleme care în abordarea anterioară nu aveau sens cum ar fi „probabilitatea realizării inegalității triunghiului" pentru trei puncte date $p, q, r \in S$ adică $P(\{\omega : X_{pr}(\omega) \leqslant X_{pq}(\omega) + X_{qr}(\omega)\})$.

Definiția 3.1.23. Un triplet ordonat $(S, (\Omega, \mathcal{K}, P), \Phi)$, se numește *structură metrică aleatoare* dacă $\Phi : S \times S \to \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{K}, P)$, adică asociază fiecărei perechi de puncte din S o variabilă aleatoare reală pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$.

Dacă pentru fiecare pereche $p, q \in S$ structura metrică aleatoare satisface condițiile

A) dacă $p = q$, atunci $X_{pq} = 0$ a.s.,
B) $X_{pq} \geqslant 0$ a.s.,
C) $X_{pq} = X_{qp}$ a.s.,

atunci ea se numește *spațiu semimetric aleator* sau *SMA-spațiu*.

Definiția 3.1.24. O structură metrică aleatoare pentru care avem
A_1) $P(\{\omega \in \Omega : X_{pp}(\omega) = 0$ pentru orice $p \in S\}) = 1$,
B_1) $P(\{\omega \in \Omega : X_{pq}(\omega) \geqslant 0$ pentru orice $p, q \in S\}) = 1$,
C_1) $P(\{\omega \in \Omega : X_{pq}(\omega) = X_{qp}(\ )$ pentru orice $q, p \in S\}) = 1$, se numește *spațiu semimetric uniform aleator* sau *SMUA-spațiu*.

În mod natural se pot extinde noțiunile de izometrie și izomorfism la aceste structuri aleatoare și rezultă ușor că în cazul SMA-spațiilor proprietățile care se păstrează prin izomorfism sînt cele care se exprimă în termenii funcțiilor de repartiție, de exemplu, cele care se referă la distanța relativă a oricărei mulțimi numărabile de puncte din S.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.1.32. *Orice SMUA-spațiu este un SMA-spațiu iar cînd S este o mulțime numărabilă are loc și afirmația reciprocă.*

Demonstrație. Să observăm că de obicei condițiile B) și B_1) sînt cele asupra cărora trebuie să ne oprim. Cum $\{\omega \in \Omega: X_{pq}(\omega) \geqslant 0$ pentru orice $p, q \in S\} = \bigcap_{p,q \in S} \{\omega \in \Omega: X_{pq}(\omega) \geqslant 0\}$ și dacă aceasta are probabilitatea 1 (are loc B_1)) atunci fiecare termen al intersecției are probabilitatea 1 (are loc B)). Dacă S este numărabilă are loc și implicația inversă.

Teorema 3.1.33. *Orice SMA-spațiu* $(S, (\Omega, \mathcal{K}, P), \Phi)$ *este izomorf cu un SMUA-spațiu* $(S, (\Omega, \mathcal{K}, P), \Phi_1)$.

Demonstrație. Fie $\Phi_1(p, q) = Y_{pq}$ definită pentru orice $p, q \in S$, $p \neq q$, prin

$$Y_{pq}(\omega) = \begin{cases} X_{pq}(\omega) \text{ dacă } X_{pq}(\omega) = X_{qp}(\omega) \geqslant 0 \\ 1 \text{ în rest} \end{cases}$$

iar $Y_{pp}(\omega) = 0$. Atunci $(S, (\Omega, \mathcal{K}, P), \Phi_1)$ este SMUA-spațiul căutat deoarece $X_{pq} = Y_{pq}$ a.s. pentru orice $p, q \in S$ și este uniform căci $Y_{pp}(\omega) = 0$ pentru orice $\omega \in \Omega$ iar $Y_{pq}(\omega) = 1$ în cazul $X_{pq}(\omega) \neq 0$ sau $X_{pq}(\omega) \neq X_{qp}(\omega)$.

Să observăm că în SMUA-spații aproape pentru fiecare $\omega \in \Omega$, funcția distanță $d_\omega: (p, q) \to X_{pq}(\omega)$ este o semimetrică pe S, generalizată în sensul că între puncte distincte p și q distanța poate fi nulă. Această interpretare care servește la denumirea spațiului sugerează renunțarea la SMA-spații, deoarece în acest caz d_ω este o semimetrică generalizată, în general, numai pe submulțimi numărabile ale lui S iar teorema 3.1.32 sugerează că SMA-spațiile nu sînt necesare. Cu toate acestea, din punctul de vedere al lui Kolmogorov privind teoria clasică a probabilităților, noțiunea de SMA-spațiu este mai convingătoare decît cea de SMUA-spațiu pentru că proprietățile A) — C) sînt exprimabile prin funcții de repartiție, ceea ce nu se întîmplă cu A_1) — C_1) și se știe că două sisteme sînt probabilistic nediscernabile dacă și numai dacă clasele de funcții de repartiție comună sînt identice.

Dacă într-un SMA-spațiu este verificată condiția

D) $X_{pr} \leqslant X_{pq} + X_{qr}$ a.s. pentru orice $p, q, r \in S$, fixate atunci spunem că avem un spațiu *pseudometric aleator (SPA-spațiu)* în care caz aproape pentru fiecare $\omega \in \Omega$ funcția $d_\omega(p, q)$ este o pseudometrică pe orice mulțime numărabilă a lui S.

Dacă într-un SMUA-spațiu avem condiția

D_1) $P(\{\omega \in \Omega: X_{pr}(\omega) \leqslant X_{pq}(\omega) + X_{qr}(\omega)$ pentru orice $p, q, r \in S\}) = 1$ spunem că avem un *spațiu pseudometric uniform aleator (SPUA-spațiu)*. În acest caz $d_\omega(p, q)$ este o pseudometrică pe S aproape pentru fiecare $\omega \in \Omega$.

Un SPA-spațiu în care are loc

B′) pentru orice $p, q \in S$, $p \neq q$, $X_{pq} > 0$ a.s.

se numește *spațiu metric aleator (MA-spațiu)*. În acest caz d_ω este o metrică pe orice submulțime numărabilă din S.

Un SMUA-spațiu în care avem

B_1') $P(\{\omega \in \Omega: X_{pq}(\omega) > 0$ pentru orice $p \neq q\}) = 1$, și condiția D_1) se numește *spațiu metric uniform aleator (MUA-spațiu)*. În asemenea spații aproape fiecare d_ω este o metrică pe S.

Cu privire la legătura dintre PM-spații și structurile metrice aleatoare vom avea

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.1.34. *Fie* $(S, (\Omega, \mathcal{K}, P), \Phi)$ *un SMA-spațiu, atunci condiția*

A') *pentru oride* $p, q \in S$, $X_{pq} = 0$ *a.s. implică* $p = q$,

este o condiție necesară și suficientă pentru ca PM-spațiul indus $(S, \mathcal{F})$ *(*$\mathcal{F}(p, q)$ *fiind funcția de repartiție asociată lui* X_{pq}*) să fie izometric cu* $(S, (\Omega, \mathcal{K}, P), \Phi)$.

Numind *PME*-spațiu un *PM*-spațiu în care $\mathcal{F}$ asociază la fiecare n-uplu $\alpha = (p_1q_1, \ldots, p_nq_n)$ funcția de repartiție comună F_α a vectorului aleator $X_\alpha = (X_{p_1q_1}, \ldots, X_{p_nq_n})$ avem că fiecare *SMA*-spațiu induce un *PME*-spațiu și reciproc fiecare *PME*-spațiu induce un *SMA*-spațiu conform teoremei de consistență a lui Kolmogorov ale cărei ipoteze sînt presupuse îndeplinite.

Teorema 3.1.35. *Dacă* $(S, \mathcal{F})$ *este un PM-spațiu care admite PME-spațiu* $[S, \mathcal{F}]$, *atunci condiția*

b) *dacă* $\alpha = (pq, qp)$ *atunci avem că* $F_\alpha(x, x) = F_\alpha(x, \infty)$ *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$, *este necesară și suficientă pentru existența unui SMA-spațiu* $(S, (\Omega, \mathcal{K}, P), \Phi)$ *unic pînă la un izomorfism, care induce pe* $(S, \mathcal{F})$ *și a cărui structură metrică aleatoare induce pe* $[S, \mathcal{F}]$.

Nu se micșorează generalitatea dacă se studiază *PM*-spațiile în terminologia *SMA*-spațiilor întrucît avem

Teorema 3.1.36. *Orice spațiu semimetric probabilist (PM-spațiu fără axioma triunghiului) este izometric cu un SMA-spațiu.*

În ceea ce privește legătura dintre *SMA*-spații și spațiile lui Špaček avem

Teorema 3.1.37. *Dacă* $(S, (\Omega, \mathcal{K}, P), \Phi)$ *este un MA-spațiu în care avem*

i) Ω *este familia funcțiilor* $f: S \times S \to \mathbf{R}$, *adică* $\Omega = \mathbf{F}$,

ii) $X_{pq}: f \to f(p, q)$ *adică* $X_{pq}(f) = f(p, q)$ *pentru orice* $p, q \in S$, $f \in \mathbf{F}$,

iii) $\mathcal{K}$ *este cel mai mic* σ *— corp de părți ale lui* $\mathbf{F}$ *care face ca fiecare* X_{pq} *să fie o variabilă aleatoare, atunci* $(S, (\Omega, \mathcal{K}, P), \Phi)$ *este o metrică aleatoare pe* S.

Reciproc, orice metrică aleatoare pe S este un *MA*-spațiu care satisface i), ii), și iii).

De asemenea avem

Teorema 3.1.38. a) *orice PM-spațiu pseudometric-generat este izometric cu un SMUA-spațiu.*

b) *Orice E-spațiu este izometric cu un SPUA-spațiu.*

Deci conceptele de *E*-spațiu, *PM*-spații pseudometric-generate și *SPUA*-spații sînt esențial echivalente, adică în particular un *PM*-spațiu este *E*-spațiu dacă și numai dacă el este pseudometric-generat sau dacă și numai dacă este un *SPUA*-spațiu.

1.6.4. Metrici stocastice în sensul lui J. B. Brown. Reluînd ideea asocierii unui proces stocastic cu proprietăți speciale care să generalizeze ideea metrizării probabiliste a unui spațiu, J. B. Brown în [35] propune o nouă metrică stocastică ce permite încadrarea ca și cazuri speciale a metricii lui Špaček, a spațiilor metric sau pseudometric-generate precum și a celor definite de P. Calabrese. Ele sînt deci generalizări și ale conceptelor definite de O. Onicescu [198], G. Sâmboan și al. [230].

Definiția 3.1.25. Se numește *metrică stocastică* sau *SM-metrică* pentru o mulțime S, o pereche (d, P) unde P este o măsură de probabilitate pe un σ-corp $\mathcal{K}$ de părți ale unui spațiu Ω iar d o aplicație de la $S \times S$ la mulțimea variabilelor aleatoare pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, cu proprietățile:

(1) $d_{pq} \geqslant 0$ a.s. $(d_{pq} = d(p, q))$,

(2) $d_{pq} = 0$ a.s. dacă și numai dacă $p = q$,

(3) $d_{pq} = d_{qp}$ a.s.,

(4) dacă $d_{pq} < x$ a.s. și $d_{qr} < y$ a.s., atunci $d_{pr} < x + y$ a.s.

Scanned with OKEN Scanner

Este evident că aceasta este o generalizare a metricii obișnuite în sensul că dacă pentru fiecare pereche $(p, q) \in S \times S$ variabila aleatoare d_{pq} este o constantă δ_{pq} a.s., atunci aplicația δ este o metrică pe S. Mai mult, dacă pentru fiecare pereche (p, q) notăm prin F_{pq} funcția de repartiție a lui d_{pq} atunci $(S, \mathcal{F})$ este un PM-spațiu și se zice că (d, P) este o SM-metrică pentru $(S, \mathcal{F})$. Unei SM-metrici îi corespunde un PM-spațiu însă invers sînt mai multe posibilități. De exemplu, avem

Definiția 3.1.26. Fie L măsura Lebesgue pe $[0, 1]$ și $(S, \mathcal{F})$ un PM-spațiu, atunci se numește *SM-metrică principală* pentru $(S, \mathcal{F})$ perechea (d, L) unde d se definește prin $d_{pq}(u) = \max \{t: F_{pq}(t) \leqslant u\}$ pentru orice $u \in [0, 1]$ și $p, q \in S$.

Evident, vom avea că PM-spațiul $(S, \mathcal{F})$ este metric-generat dacă și numai dacă există o SM-metrică (d, P) pentru $(S, \mathcal{F})$ care satisface

(8) pentru orice $u \in \Omega$, funcția $d[u]$ definită prin $d[u](a, b) = d_{ab}(u)$ pentru orice $a, b \in S$, este o metrică pe S și $d[u] \neq d[u']$ dacă $u \neq u'$,

iar caracterizarea PM-spațiilor pseudometric-generate este dată de

(7) pentru orice $u \in \Omega$, funcția $d[u]$ este o pseudometrică pe S și $d[u] \neq d[u']$ dacă $u \neq u'$.

Dacă SM-metrica (d, P) satisface condiția

(6) $d_{pr} \leqslant d_{pq} + d_{qr}$ a.s.

se zice că avem o *SM-metrică tare* iar (d, P) se numește *SM-metrică proprie* dacă satisface condiția

(5) $P(d_{pr} < x) \geqslant P(d_{pq} + d_{qr} < x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Se verifică ușor că dacă (d, P) este o SM-metrică, atunci (8) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (4) dar că nici una dintre aceste implicații nu are loc și reciproc.

O clasă largă de PM-spații este dată de

Definiția 3.1.27. Un PM-spațiu $(S, \mathcal{F})$ se numește *W-spațiu* dacă există o SM-metrică proprie pentru $(S, \mathcal{F})$.

Această clasă de PM-spații conține spațiile Wald, spațiile metric generate și pseudometric-generate.

Introducînd noțiunea de *SM-metrică independentă* (d, P) pentru cazul cînd pentru orice familie W de perechi ordonate $w = (p, q)$ cu proprietatea că $(q, p) \neq \{p, q\}$ rezultă că $\{d_w: w \in W\}$ este o familie de variabile aleatoare independente, se demonstrează

Teorema 3.1.39. *Un PM-spațiu $(S, \mathcal{F})$ este un spațiu Wald dacă și numai dacă există o SM-metrică proprie independentă pentru $(S, \mathcal{F})$.*

Prin exemple se arată că dacă $(S, \mathcal{F})$ este spațiu Wald nu rezultă că există o SM-metrică tare independentă pentru $(S, \mathcal{F})$. De asemenea avem

Teorema 3.1.40. *Dacă $(S, \mathcal{F})$ este un PM-spațiu, atunci el este un spațiu Menger față de t-norma $T = Min$ dacă și numai dacă SM-metrica principală pentru $(S, \mathcal{F})$ este tare.*

Rezultă că orice spațiu Menger $(S, \mathcal{F}, \text{Min})$ este un W-spațiu însă există spații Menger $(S, \mathcal{F}, T)$ cu T mai slabă decît Min care nu sînt W-spații. O condiție necesară ca un PM-spațiu să fie W-spațiu este aceea care rezultă din teorema 4 [35] care afirmă că dacă $(S, \mathcal{F})$ este un W-spațiu atunci $(S, \mathcal{F}, T_m)$ este un spațiu Menger.

Cu privire la optimalitatea t-normei T_m din teorema 3.1.28 avem.

Teorema 3.1.41. *Există spații metric-generate (deci și W-spații) $(S, \mathcal{F})$ astfel că T_m este cea mai tare t-normă pentru care $(S, \mathcal{F}, T)$ este un spațiu Menger.*

Scanned with OKEN Scanner

Probleme de continuitate sau uniform continuitate pentru SM-metrici precum și probleme privind topologia indusă pun în evidență noi aspecte la care nu ne oprim.

1.7. SPAȚII ŠERSTNEV, LEGĂTURA CU ALTE CLASE ANTERIOARE ȘI IMPLICAȚII NOI ÎN ANALIZA PROBABILISTĂ

Ideea lui A. N. Šerstnev [268], [269] de a introduce o inegalitate a triunghiului pe PM-spații cu ajutorul funcțiilor triunghiulare τ, care conține ca un caz particular inegalitățile lui Menger și Wald, pe lîngă că a oferit un cadru nou acestor teorii ea conduce și la probleme noi cum este aceea de găsire a structurii semigrupurilor topologice pe $\mathcal{R}^+$, aceea de a găsi o abordare adecvată analizei funcționale probabiliste etc. Acest punct de vedere pare un cadru mai natural pentru dezvoltările ulterioare ale teoriei structurilor probabiliste, după opinia lui B. Schweizer, ceea ce a și inceput să se confirme. Deocamdată ne ocupăm numai de implicațiile din teoria metricilor aleatoare.

Definiția 3.1.28. Se numește spațiu Šerstnev un triplet $(S, \mathcal{F}, \tau)$ unde $\mathcal{F}: S \times S \to \mathcal{R}^+$ și pentru orice $p, q, r \in S$ avem

I) $F_{pq} = H_0$ dacă și numai dacă $p = q$,

II) $F_{pq} = F_{qp}$,

III$_s$) $F_{pr} \geqslant \tau(F_{pq}, F_{qr})$ unde τ este o funcție triunghiulară în sensul lui Šerstnev (§ 1.4, cap. II) relativ la o mulțime $E \supseteq \mathcal{F}(S \times S)$.

Cu privire la legătura spațiilor Šerstnev cu alte spații probabiliste avem

Teorema 3.1.42. *Fie $(S, \mathcal{F}, \tau)$ un spațiu Šerstnev. Atunci avem:*

a) *dacă τ posedă proprietatea $\tau(H_a, H_b) \geqslant H_{a+b}$ pentru orice $a, b \in [0, \infty)$ $(H_a(x) = 0$ pentru $x \leqslant a$, $H_a(x) = 1$ pentru $x > a)$ atunci $(S, \mathcal{F})$ este un PM-spațiu în sensul lui Schweizer-Sklar* (definiția 3.1.6) *în care axioma triunghiului este puțin modificată adică*

4') *dacă $F_{pq}(x + 0) = 1$ și $F_{qr}(y + 0) = 1$ atunci $F_{pr}(x + y + 0) = 1$.*

b) *$(S, \mathcal{F}, \tau)$ este un spațiu Wald dacă și numai dacă $\tau(F, G) = F * G$ adică τ este chiar produsul de convoluție.*

c) *Dacă T este o t-normă continuă la stînga iar $\tau = \tau_T$ este dată prin $\tau_T(F, G; x) = \sup_{u+v=x} T(F(u), G(v))$ atunci $(S, \mathcal{F}, \tau_T)$ este un spațiu Šerstnev dacă și numai dacă $(S, \mathcal{F}, T)$ este spațiu Menger.*

Demonstrație. a) Justificarea acestei afirmații rezultă din observația că pentru orice $F \in \mathcal{R}^+$ și orice $a \geqslant 0$, $F(a + 0) = 1$ dacă și numai dacă $F \geqslant H_a$.

b) Afirmația aceasta rezultă imediat din proprietățile cunoscute ale operației de convoluție prezentate în capitolul II.

c) Din teorema 2.1.20 rezultă că τ_T astfel definit este din $\mathcal{R}^+$ și este o funcție triunghiulară. Atunci, dacă $(S, \mathcal{F}, \tau_T)$ este un spațiu Šerstnev, avem că pentru orice $p, q, r \in S$ și $x, y \geqslant 0$ putem scrie

$$F_{pr}(x + y) \geqslant \tau_T(F_{pq}, F_{qr}; x + y) = \sup_{u+v=x+y} T(F_{pq}(u), F_{qr}(v)) \geqslant$$
$$\geqslant T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$$

adică (IV$_m$) este verificată și $(S, \mathcal{F}, T)$ este un spațiu Menger.

Reciproc, dacă

$$F_{pr}(x + y) \geqslant T(F_{pq}(x), F_{qr})) \text{ pentru orice } x, y \geqslant 0$$

atunci $F_{pr}(x + y) \geqslant \sup_{u+v=x+y} T(F_{pq}(u), F_{qr}(v)) = \tau_T(F_{pq}, F_{qr}; x + y)$ și teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Am văzut în capitolul II, § 1.4 că uneori se lucrează mai comod cu funcții $F^t(x) = 1 - F(x)$, $x \in \mathbf{R}$ și cu t-conorme $T^*(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$ în care inegalitatea lui Menger capătă forma

$$F^t_{pr}(x + y) \leqslant T^*(F^t_{pq}(x),\ F^t_{qr}(y))$$

De altfel însuși Šerstnev lucrează numai cu funcții de forma F^t în care caz avem

$$F^t_{pr}(x) \leqslant \inf_{u+v=x} T^*(F^t_{pq}(u),\ F^t_{qr}(v)) = \inf_{u+v=x} [1 - T(1 - F^t_{pq}(u),\ 1 - F^t_{qr}(v))] =$$

$$= 1 - \sup_{u+v=x} T(F_{pq}(u),\ F_{qr}(v))$$

adică

$$F^t_{pr} \leqslant [\tau_T(F_{pq},\ F_{qr})]^t$$

De asemenea în ceea ce privește funcția T se lucrează cu o lege de compoziție asociativă și comutativă pe $[0, 1]$ care verifică în plus pentru orice $u, v, w \in [0, 1]$ condițiile

$$t_1)\ T(u, 0) = u;\quad t_2)\ T(u, v) \geqslant T(w, v) \text{ dacă } u \geqslant w,\quad t_3)\ T(u, v) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0,\ \delta \downarrow 0} T(u + \varepsilon, v + \delta).$$

Se demonstrează că orice spațiu metric (S, d) este un spațiu Šerstnev dacă se ia $\mathcal{F}(p, q) = F_{pq} = H_{d(p,q)}$ și $\tau(H_a, H_b) = H_{a+b}$, adică τ este o funcție triunghiulară pe $B \in \mathcal{R}^+_v$, B fiind imaginea lui $S \times S$ prin $\mathcal{F}$.

În cazul spațiului Wald inegalitatea triunghiului devine

$$F_{pq}(x) \leqslant F_{rq}(x) - \int_0^x F_{pr}(x - s)\, dF_{rq}(s) \text{ pentru orice } p,\ q,\ r \in S$$

și orice spațiu Wald este un spațiu Menger relativ la $T(a, b) = a + b - ab$.

Se introduce în mulțimea funcțiilor triunghiulare o relație de ordine considerînd că o funcție triunghiulară τ relativ la o mulțime (pe care τ verifică condițiile din definiție) $E \subseteq \mathcal{R}^+_t = \{G = 1 - F : F \in \mathcal{R}^+\}$, în raport cu relația de ordine din $\mathcal{R}^+_t$ indusă pe E, este *mai bună* decît funcția triunghiulară τ' relativ la E' dacă și numai dacă $E \subseteq E'$ și $\tau(F, G) \leqslant \tau'(F, G)$ pentru orice $F, G \in E$. Se pune problema găsirii condițiilor de existență a celei mai bune funcții triunghiulare τ pentru care $(S, \mathcal{F}, \tau)$ este un spațiu Šerstnev. Această problemă revine la existența elementului minimal în mulțimea funcțiilor triunghiulare τ pentru care $(S, \mathcal{F}, \tau)$ este un spațiu Šerstnev. În acest scop considerăm $\mathcal{R}^+_t$ înzestrat cu topologia convergenței în repartiție și notăm prin E_τ familia părților lui $\mathcal{R}^+_t$ relativ la care τ este o funcție triunghiulară. Se obțin rezultate care generalizează pe cele privitoare la cea mai bună t-normă din [282] și anume

Teorema 3.1.43. *Fie S o mulțime arbitrară și $\mathcal{F} : S \times S \to \mathcal{R}^+_t$ ale cărei funcții imagine definesc un spațiu semimetric probabilist. Fie $\mathbf{J}$ mulțimea funcțiilor triunghiulare τ cu proprietățile*

1) *$(S, \mathcal{F}, \tau)$ este un spațiu Šerstnev,*

2) *pentru fiecare $F \in E_\tau$ reprezentarea $\tau(., F) : E_\tau \to E_\tau$ este continuă relativ la convergența aplicațiilor dirijate monoton descrescător pe E_τ, E_τ fiind submulțimi închise ale lui R^+_t.*

Atunci J posedă un element minimal.

Scanned with OKEN Scanner

Amintim că o funcție triunghiulară τ relativ la $E \subseteq \mathcal{R}_t^+$ se zice netrivială dacă $\{H_0^t\} \subseteq E$, $E \neq \{H_0^t\}$ iar spațiul $(S, \mathcal{F}, \tau)$ se zice netrivial dacă S are mai mult decît două puncte. Se introduce pe mulțimea funcțiilor triunghiulare $m(S)$ pentru care $(S, \mathcal{F}, \tau)$ este un spațiu Šerstnev netrivial o relație de ordine $\tau \subseteq \tau'$ pentru $\tau, \tau' \in m(S)$ dacă $\mathbf{M}\ p_i p_{i+1} \leqslant \mathbf{M}'\ p_i p_{i+1}$ pentru orice $p_1, \ldots, p_{n+1} \in S$, $1 \leqslant i \leqslant n$, n fixat din $\mathbf{N}$ iar $\mathbf{M}\ F_i = \tau(F_1, \tau(F_2, \ldots, \tau(F_{n-1}, F_n) \ldots))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathbf{M}'$ avînd aceeași expresie cu $\mathbf{M}$ unde înlocuim pe τ cu τ'. Vom avea

Teorema 3.1.44. *Pentru orice funcție triunghiulară τ, netrivială, se poate construi un spațiu Šerstnev netrivial pentru care τ este cel mai mic element al mulțimii $m(S)$.*

Amintind că abordarea introdusă de Špaček pare mai naturală din punctul de vedere ansamblist al teoriei probabilităților și că stabilirea legăturii cu abordarea lui Menger face ca și aceasta să se apropie mai mult de teoria tradițională, Šerstnev studiază această conexiune într-o viziune mai generală. În acest scop el consideră $\{p\} \subseteq S$, $\{p\} \neq S$, notează prin (S) mulțimea perechilor (p, q), $p, q \in S$, $p \neq q$ (în care se identifică perechile (p, q) și (q, p)) și $\mathbf{R}^{(S)} = \prod_{(p,q) \in S} \mathbf{R}_{pq}$, adică produsul cartezian a (S) exemplare ale dreptei reale iar $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{(S)})$ este σ-corpul mulțimilor boreliene din $\mathbf{R}^{(S)}$. Cu aceste precizări mulțimea S se numește spațiu Špaček dacă σ-corpul $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{(S)})$ este înzestrat cu o măsură de probabilitate $\mathbf{m}$ și dacă pentru orice triplet de puncte distincte $p, q, r \in S$ avem $\mathbf{m}(D_{pqr}) = 1$, unde $D_{pqr} = \{f \in \mathbf{R}^{(S)}: f_{pq} \leqslant f_{pr} + f_{rq}\}$. Vom avea

Teorema 3.1.45. *Dacă S este un spațiu Špaček și $\mathbf{m}$ măsura de probabilitate corespunzătoare pe $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{(S)})$ atunci aplicația $\mathcal{F}(p, q) = F_{pq}$ definită prin*

$$F_{pq}(x) = \mathbf{m}(\{f \in \mathbf{R}^{(S)}: f_{pq} \geqslant x\}),\ (p, q) \in (S) \tag{1}$$

împreună cu funcția triunghiulară

$$\mu_1(F, G, ; x) = \inf_{t+t'=1} \min \{F(tx) + G(t'x),\ 1\}$$

definesc pe S un spațiu Šerstnev.

Demonstrație. Fie $x, y \in \mathbf{R}$ și un triplet de puncte distincte $p, q, r \in S$, atunci avem

$$F_{pq}(x+y) = \mathbf{m}(\{f: f_{pq} \geqslant x+y\}) = m(\{f: f_{pr} + f_{rq} \geqslant f_{pq} \geqslant x+y\}) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{m}(\{f: f_{pr} + f_{rq} \geqslant x+y\}) \leqslant \mathbf{m}(\{f: f_{pr} \geqslant y\} \cup \{f: f_{rq} \geqslant x\}) \leqslant$$
$$\leqslant F_{pr}(y) + F_{rq}(x)$$

pentru că $\{f: f_{pr} < y\} \cap \{f: f_{rq} < x\} \subseteq \{f: f_{pr} + f_{rq} < x+y\}$ ceea ce demonstrează teorema.

Teorema reciprocă nu este adevărată deoarece există spații Šerstnev pentru care nu se poate determina o măsură $\mathbf{m}$ care să definească pe S un spațiu Špaček și care să verifice relația (1).

Teorema 3.1.46. *Orice spațiu Šerstnev $(S, \mathcal{F}, \mu_0)$ este compatibil cu structura de spațiu Špaček, unde* $\mu_0(F, G; x) = \inf_{t+t'=1} \max \{F(tx), G(t'x)\}$

Demonstrație. Pentru fiecare pereche $(p, q) \in S$ să definim $x_{pq}(t) = \sup \{x \in \mathbf{R}: F_{pq}(x) > 1 - t\}$, $0 \leqslant t < 1$. Pentru fiecare alegere finită de perechi $(p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k) \in (S)$ să considerăm funcția de repartiție în spațiul $R_{p_1q_1} \times \ldots \times R_{p_kq_k}$ dată prin

$$F^1_{p_1q_1, \ldots, p_kq_k}(x_1, \ldots, x_k) = \sup \{t:\ x_{p_1q_1}(t) < x_1, \ldots, x_{p_kq_k}(t) < x_k\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această familie de funcții de repartiție satisface condițiile de consistență ale teoremei lui Kolmogorov și deci definesc o măsură de probabilitate $\mathbf{m}$ pe $\mathbf{R}^{(S)}$. Arătăm că măsura $\mathbf{m}$ este cea căutată pentru că verificarea relației (1) rezultă ușor dacă avem

$$F^1_{pq}(x) = 1 - F_{pq}(x),\ x \in \mathbf{R} \tag{2}$$

Aceasta însă rezultă din observația că $F^1_{pq}(x) = \sup\{t: x_{pq}(t) < x\} \leqslant 1 - F_{pq}(x)$. Dacă ar exista un x în care inegalitatea aceasta să fie strictă atunci ar exista un t' astfel că $\sup\{t: x_{pq}(t) < x\} < t' < 1 - F_{pq}(x)$. Atunci din relația $F_{pq}(x) < 1 - t'$ ar rezulta că $x > x_{pq}(t')$ ceea ce contrazice definiția lui $F^1_{pq}(x)$, deci (2) are loc și din ea rezultă (1).

Pentru a arăta că $\mathbf{m}(D_{pqr}) = 1$ este suficient să arătăm că $f \in D_{pqr}$ de fiecare dată cînd $f_{pq} = x_{pq}(t)$, $f_{pr} = x_{pr}(t)$, $f_{rq} = x_{rq}(t)$ pentru $p \neq q \neq r \neq p$, $p, q, r \in S$. Dacă presupunem că pentru un oarecare $t \in [0, 1)$ avem $x_{pq}(t) > x_{pr}(t) + x_{rq}(t)$ atunci se pot alege a și b astfel ca să avem $x_{pq}(t) = a + b$, $a > x_{pr}(t)$, $b > x_{rq}(t)$ însă aceasta conduce la contradicția $1 - t \leqslant F_{pq}(x_{pq}(t)) \leqslant \max\{F_{pr}(a), F_{rq}(b)\} < 1 - t$. Deci măsura $\mathbf{m}$ definește pe S un spațiu Špaček compatibil cu structura de spațiu Šerstnev.

§ 2. PROCESE ALEATOARE ȘI SPAȚII METRICE PROBABILISTE

Prima încercare sistematică de a stabili o legătură mai strînsă între procesele aleatoare markoviene și metricile probabiliste îi aparține lui P. S. Marcus [160]. El pornește de la observația că teoria probabilistă a relațiilor „între", deci și teoria convexității, au întîmpinat dificultăți sesizate încă de Menger. Punctul său de plecare a fost spațiul metric al curbelor închise pe o varietate, introdus de M. Morse în legătură cu unele probleme ale calculului variațional, în care se folosește o relație „între" diferită de cea dată de Menger. De altfel, ideea randomizării spațiului curbelor, prin introducerea unei probabilități pe acesta, îi aparține lui N. Wiener care stabilește o conexiune între procese aleatoare și metrici probabiliste.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate și $\widetilde{X}: \Omega \times T \to S$ un proces stocastic în care $T \subseteq \mathbf{R}$ iar S un spațiu cu măsură numit și spațiul stărilor. În cazul cînd $S \subseteq \mathbf{R}^n$ și există un șir $\{t_i\}$ de parametri precum și o mulțime Λ de traiectorii (adică de funcții de selecție $\widetilde{X}(\omega, .)$ pentru $\omega \in \Omega$ fixat) de măsură nulă, astfel că oricare ar fi $A \in \mathcal{A}$ și I un interval deschis, mulțimile $\{\omega: Y_t(\omega) = \widetilde{X}(\omega, t) \in A,\ t \in I \cap T\}$ și $\{\omega: Y_{t_i}(\omega) \in A,\ t_i \in I \cap T\}$ diferă cel mult printr-o submulțime a lui Λ, se spune că avem un *proces stocastic separabil* relativ la familia $\mathcal{A}$ de mulțimi boreliene din S. Cea de a doua mulțime este măsurabilă și o conține pe prima, deci în ipoteza de separabilitate și prima mulțime este măsurabilă. Se obișnuiește să se identifice funcțiile de selecție $Z_\omega(t) = \widetilde{X}(\omega, t)$ cu elementele corespunzătoare $\omega \in \Omega$ și se obțin condiții de măsurabilitate ale mulțimilor de traiectorii ale procesului.

Pentru a aminti noțiunea de proces Markov, categoria cea mai studiată dintre procesele stocastice, amintim noțiunea de probabilitate condiționată sub forma lui A. Rényi [222]. În acest scop se consideră o subfamilie nevidă $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ și se definește probabilitatea condiționată $P(A/B)$, pentru fiecare $B \in \mathcal{C}$ ca fiind o aplicație cu proprietățile

1) $P(A/B) \geqslant 0$ și $P(B/B) = 1$,
2) Pentru orice $B \in \mathcal{C}$, fixat, $P(A/B)$ este o măsură pe $\mathcal{K}$,
3) Dacă $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}$, $B \cap C \in \mathcal{C}$, $C \in \mathcal{C}$ atunci
$P(A/B \cap C) \cdot P(B/C) = P(A \cap B/C)$ (identitatea lui Rényi)

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unui proces Markov funcția de repartiție comună a unei mulțimi finite de variabile aleatoare este determinată cu ajutorul unei probabilități inițiale și a probabilităților de trecere care descriu cum se trece de la o stare ocupată la un moment dat (o valoare a lui t) la o altă stare ocupată la alt moment. Fie T mulțimea parametrilor, S spațiul stărilor și $\mathcal{A}$ σ-algebra părților măsurabile ale lui S. Vom considera că părțile unipunctuale ale lui S sînt măsurabile și pentru orice $s, t \in T$, $x \in S$, $M \in \mathcal{A}$ vom defini probabilitățile de trecere $P_{xM}(s, t)$ prin condițiile:

1) $P_{xM}(s, t)$ este o măsură de probabilitate pe $\mathcal{A}$ pentru s, t și x fixate,

2) $P_{xM}(s, t)$ este o funcții măsurabilă de x pentru s, t, M fixate,

3) $P_{xM}(s, t) = \int_{y \in S} P_{yM}(r, t)\, dP_{xy}(s, r)$ pentru orice $r \in T$ cu $s < r < t$

(ecuația lui Chapman-Kolmogorov).

Odată definite probabilitățile de trecere se introduc procesele Markov dîndu-se funcțiile comune de repartiție prin

$$\text{(I)} \qquad F_{t_0 t_1 \dots t_n}(A_0, A_1, \dots, A_n) =$$

$$= \int_{A_0} \int_{A_1} \dots \int_{A_{n-1}} \int_{A_n} P_{x_{n-1}A_n}(t_{n-1}, t_n)\, dP_{x_{n-2}x_{n-1}}(t_{n-2}, t_{n-1}) \dots dP_{x_1 x_2}(t_1, t_2)\, dP_0 =$$

$$= P(\{\omega\colon Y_{t_j}(\omega) \in A_j,\ j = 0, 1, \dots, n,\ t_0 < t_1 < \dots < t_n\})$$

unde P_0 este probabilitatea inițială la momentul t_0.

De obicei în ecuația (I) $P_{xM}(s, t)$ se identifică cu probabilitatea condiționată $P(Y_t(\omega) \in M / Y_s(\omega) = x)$ unde prin „$Y_s(\omega) = x$" se notează cea mai mică σ-subalgebră a lui Ω ce conține toate funcțiile de selecție ω pentru care $Y_s(\omega) = x$ și vom presupune în plus că identitatea lui Rényi este verificată. În acest caz dacă notăm prin

$$A = \{\omega\colon Y_{t_1}(\omega) \in A_1, \dots, Y_{t_k}(\omega) \in A_k\},\quad B = \{\omega\colon Y_{t_{k+1}}(\omega) \in A_{k+1}, \dots,$$
$$Y_{t_n}(\omega) \in A_n\} \text{ unde } t_0 \leqslant t_1 < \dots < t_k < t < t_{k+1} < \dots < t_n,$$

atunci (I) implică

$$\text{(II)} \qquad P(A \cap B)/Y_t(\omega) = x) = P(A/Y_t(\omega) = x)\ P(B/Y_t(\omega) = x)$$

adică dîndu-se prezentul, trecutul și viitorul sînt independente.
Dacă B este un eveniment viitor relativ la t proprietatea (II) este echivalentă cu

$$\text{(III)} \quad P(B/Y_{t_1}(\omega) = x_1, \dots, Y_{t_k}(\omega) = x_k,\ Y_t(\omega) = x) = P(B/Y_t(\omega) = x)$$

cum este de cele mai multe ori întîlnită ca relație de definiție a proceselor Markov și care se și numește proprietatea lui Markov.

Un proces Markov se numește *staționar* dacă probabilitățile de trecere $P_{xM}(s, t)$ sînt independente de timp și depind numai de diferența $s - t$, așa că vom avea pentru orice h, cu proprietatea că $s+h$ și $t+h$ sînt valori admisibile ale parametrilor,

$$P_{xM}(s, t) = P_{xM}(s + h, t + h) = P_{xM}(s - t)$$

Fiind dat un proces Markov $\tilde{X}$, pentru orice două stări distincte x, y și pentru orice $t > 0$ se definește

$$F_{xy}(t) = P(Y_r(\omega) = y,\ 0 < r \leqslant t / Y_0(\omega) = x)$$

Scanned with OKEN Scanner

și se numește *funcție de repartiție de trecere*. Pentru $T = \mathbf{N}$ se obține un lanț Markov și dacă vom considera că $F_{xy}(t) = 1$ pentru $x = y$, $t > 0$, $F_{xy}(0) = 0$ pentru orice $x, y \in S$ și $F_{xy}(t) = 0$ pentru orice $t < 0$, vom avea

Teorema 3.2.1. *Funcțiile de repartiție de trecere ale oricărui lanț Markov staționar definesc un PM-spațiu nesimetric de tip Menger (care se mai numește spațiu cvasimetric probabilist de tip Menger) pentrn* $T = T_m$.

Demonstrație. Dacă $T_m(F_{xy}(t_1), F_{yz}(t_2)) = 0$ concluzia este evidentă. În caz contrar introducem notațiile

p_i = probabilitatea ca starea y să fie atinsă pentru prima dată exact după i pași după ce s-a atins x,

q_i = probabilitatea ca starea z să fie atinsă pentru prima dată exact după i pași după ce a fost atinsă starea y,

r_i = probabilitatea ca starea y să se atingă pentru prima dată, fără a fi atinsă mai întîi z, exact la i pași după starea x,

s_i = probabilitatea ca starea y să se atingă pentru prima dată, trecînd mai întîi prin starea z, exact la i pași după x.

Vom avea

$$T_m(F_{xy}(t_1), F_{yz}(t_2)) = \sum_{i=1}^{t_1} p_i + \sum_{i=1}^{t_2} q_i - 1 = \sum_{i=1}^{t_1} r_i + \sum_{i=2}^{t_1} s_i + \sum_{i=1}^{t_2} q_i - 1 =$$

$$= \sum_{i=2}^{t_1} s_i + T_m\left(\sum_{i=1}^{t_1} r_i, \sum_{i=1}^{t_2} q_i\right) \leqslant \sum_{i=2}^{t_1} s_i + \mathrm{Prod}\left(\sum_{i=1}^{t_1} r_i, \sum_{i=1}^{t_2} q_i\right) \leqslant P(Y_r(\omega) =$$

$$= z,\ 0 < r \leqslant t_1 \text{ și } Y_s(\omega) \neq y,\ 0 < s \leqslant r / Y_0(\omega) = x) + P(Y_r(\omega) =$$

$$= z, 0 < r \leqslant t_1 + t_2 \text{ și } Y_s(\omega) = y \text{ pentru un } s < r / Y_0(\omega) = x) \leqslant P(Y_s(\omega) =$$

$$= z,\ 0 < s \leqslant t_1 + t_2 / Y_0(\omega) = x) = F_{xz}(t_1 + t_2)$$

ceea ce demonstrează teorema.

Acest rezultat poate fi îmbunătățit, adică avem

Teorema 3.2.2. *Funcțiile de repartiție de trecere ale unui lanț Markov staționar definesc un spațiu cvasimetric probabilist de tip Menger față de* $T = \mathrm{Prod}$.

Demonstrație. În adevăr, printr-un raționament asemănător cu cel de mai sus obținem că

$$\mathrm{Prod}(F_{xy}(t_1), F_{yz}(t_2)) = F_{xy}(t_1) \cdot F_{yz}(t_2) = \left(\sum_{i=1}^{t_1} r_i + \sum_{i=2}^{t_2} s_i\right) \sum_{i=1}^{t_2} q_i \leqslant \sum_{i=2}^{t_1} s_i +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{t_1} r_i\right)\left(\sum_{i=1}^{t_2} q_i\right) \leqslant F_{xz}(t_1 + t_2)$$

Pentru extinderea acestor rezultate la cazul proceselor Markov separabile vom presupune că spațiul stărilor S este inclus în $\mathbf{R}^n$ și procesul este continuu în măsură, adică $\lim_{t \to S} P(\{\omega : |Y_t(\omega) - Y_s(\omega)| \leqslant \varepsilon\}) = 0$ pentru orice $\varepsilon > 0$. În asemenea condiții evenimentele de tipul

$$B = \{\omega : Y_t(\omega) = y \text{ pentru un } t,\ t \in (0, s] \text{ și } Y_r(\omega) \neq z,\ 0 < r < t\}$$

și

$$A = \{\omega : Y_t(\omega) = y \text{ pentru un } t,\ t \in (0, s] \text{ și } Y_r(\omega) = z \text{ pentru un } r,\ 0 < r < t\}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $x, y \in S$, sînt măsurabile în spațiul Ω al funcțiilor de selecție ale procesului $\tilde{X}$. În adevăr, conform unui rezultat al lui Doob pentru procese stocastice separabile și continue în măsură, orice șir $\{t_i\}$ de valori ale parametrilor, dens în mulțimea parametrilor, satisface condițiile din definiția separabilității. În acest caz schimbînd mulțimea parametrilor printr-o mulțime numărabilă densă în ea (conform separabilității), rezultă că mulțimea B se poate exprima cu ajutorul intersecțiilor, reuniunilor numărabile și complementarelor de mulțimi măsurabile iar A se poate exprima cu o complementară relativ la B.

Vom spune că un proces Markov staționar, separabil și continuu în măsură este de *tip A* dacă orice funcție de repartiție de trecere $F_{xy}(t)$ se poate exprima sub forma

$$F_{xy}(t) = \int_0^t P(Y_s(\omega) = y \quad \text{și} \quad Y_r(\omega) \neq y, \quad 0 < r < s / Y_0(\omega) = x)\, ds$$

și vom avea

Teorema 3.2.3. *Funcțiile de repartiție de trecere ale unui proces Markov de tip A definesc un spațiu cvasimetric probabilist de tip Menger relativ la* $T = \text{Prod}$.

Demonstrație. Vom demonstra teorema pentru cazul $T = T_m$ observînd că în cazul $T_m(F_{xy}(t_1), F_{yz}(t_2)) = 0$ este evidentă. Pentru restul cazurilor vom nota prin

$$A = \{\omega : Y_s(\omega) = y \text{ pentru un } s, \quad s \in (0, t_1]\}$$

$$B = \{\omega : Y_s(\omega) = y \text{ pentru un } s, \ s \in (0, t_1] \text{ și } Y_r(\omega) \neq z, \ r \in (0, s)\}$$

$$C = \{\omega : Y_s(\omega) = y \text{ pentru un } s, \ s \in (0, t_1] \text{ și } Y_r = z \text{ pentru un } r, \ r \in (0, s)\}$$

$$D = \{\omega : Y_s(\omega) = z \text{ pentru un } s, \ s \in (t_1, \ t_1 + t_2]\}$$

și vom avea

$$T_m(F_{xy}(t_1), \ F_{yz}(t_2)) = F_{xy}(t_1) + F_{yz}(t_2) - 1 = P(A / Y_0(\omega) = x) +$$

$$+ P(D / Y_{t_1}(\omega) = y) - 1 = P(B / Y_0(\omega) = x) + P(C / Y_0(\omega) = x) +$$

$$+ P(D / Y_{t_1}(\omega) = y) - 1 = P(C / Y_0(\omega) = x) + T_m(P(B / Y_0(\omega) = x),$$

$$P(D / Y_{t_1}(\omega) = y)) \leqslant P(C / Y_0(\omega) = x) + \text{Prod}(P(B / Y_0(\omega) = x,$$

$$P(D / Y_{t_1}(\omega) = y))) = P(C / Y_0(\omega) = x) + \int_0^{t_1} P(Y_s(\omega) = y \quad \text{și} \quad Y_r(\omega) \neq z,$$

$$r < s / Y_0(\omega) = x). \ P(Y_t(\omega) = z \text{ pentru un } t,$$

$$t_1 - s < t \leqslant t_1 + t_2 - s / Y_s(\omega) = y)\, ds = P(C / Y_0(\omega) = x) +$$

$$+ \int_0^{t_1} P(Y_s(\omega) = y \text{ și } Y_r(\omega) \neq z, \ r < s / Y_0(\omega) = x). \ P(Y_t(\omega) = z \text{ pentru un } t,$$

$$t_1 - s < t \leqslant t_1 + t_2 - s / Y_s(\omega) = y \text{ și } Y_r(\omega) \neq z, \ r < s \text{ și}$$

$$Y_0(\omega) = x)\, ds = P(C / Y_0(\omega) = x) + \int_0^{t_1} P(Y_t(\omega) = z \quad \text{pentru un } t,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$t_1 - s < t \leqslant t_1 + t_2 - s \text{ și } Y_r(\omega) = \text{ș} \text{ și } Y_r(\omega) \neq z,\ r < s / Y_0(\omega) = x)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant P(Y_s(\omega) = z,\ 0 < s \leqslant t_1 + t_2 / Y_0(\omega) = x) = F_{xz}(t_1 + t_2)$$

ultimele trei egalități ce preced semnul inegalității rezultînd respectiv din proprietatea de staționaritate, proprietatea lui Markov și identitatea lui Rényi. Prin urmare teorema are loc pentru $T = T_m$ iar pentru $T = \text{Prod}$ rezultă din faptul că

$$\text{Prod}(F_{xy}(t_1),\ F_{yz}(t_2)) = (P(B/Y_0(\omega) = x) + P(C/Y_0(\omega) = x))\, F_{yz}(t_2) \leqslant$$
$$\leqslant P(C/Y_0(\omega) = x) + (P(B/Y_0(\omega) = x).\ P(D/Y_{t_1}(\omega) = y) \leqslant F_{xz}(t_1 + t_2).$$

Observație. Dacă introducem comutatorul C_{xy} al funcției de repartiție de trecere F_{xy} prin $C_{xy} = 1/2\ (F_{xy}(t) + F_{yx}(t))$ și se notează prin $\mathcal{C}$ mulțimea acestor comutatori atunci $(S, \mathcal{C})$ are o structură de spațiu Menger față de T_m. În adevăr se verifică ușor că $C_{xy} = H_0$ dacă și numai dacă $F_{xy} = 0$, $C_{xy}(0) = 0$, $C_{xy} = C_{yx}$ iar din $F_{xy}(u + v) \geqslant T_m(F_{xy}(u),\ F_{yz}(v))$ și $F_{zx}(u + v) \geqslant T_m(F_{yx}(u),\ F_{zy}(v))$ se deduce că $C_{xz}(u + v) \geqslant T_m(C_{xy}(u),\ C_{yz}(v))$.

Alte contribuții importante privind PM-spațiile induse de lanțuri sau procese Markov îi aparțin lui R. Moynihan [181] care consideră o mulțime C de particule fiecare descriind în mișcarea lor un același proces Markov pe al cărui spațiu de stări S este dată o metrică d. Folosind probabilitățile de trecere pentru puncte distincte $p, q \in C$, familia parametrilor $t \in T$ care reprezintă timpul și $x \in \mathbf{R}$, se definește $F_{pq}^{(t)}(x) = P(p(p, q) < x$ la momentul $t)$ și se arată că C se organizează ca un PM-spațiu, pentru $t \geqslant 0$, relativ la $\tau_{T_m}(F, G; x) = \sup_{u+v=x} T_m(F(u),\ G(v))$, $F, G \in \mathcal{Q}^+$ și se studiază diferite implicații asupra PM-spațiilor limită și legătura acestora cu PM-spațiile obișnuite la diferite stadii ale proceselor..

Fie $\{X_t,\ t \in T\}$ un proces Markov staționar cu o mulțime finită sau numărabilă de stări $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ iar familia parametrilor t putînd fi discretă sau continuă. Rezultă că dacă pentru orice $t \in T$ notăm prin $\mathbf{P}(t) = (P_{ij}(t))$ matricea corespunzătoare probabilităților de trecere. Vom avea că relația lui Chapman-Kolmogorov devine

$$(1) \qquad P_{ij}(r + t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(r)\ P_{kj}(t) \text{ pentru orice } i, j \in S \text{ și } r, t \in T$$

iar sub formă matricială $\mathbf{P}(r+t) = \mathbf{P}(r)\ \mathbf{P}(t)$.

Fie d o matrică pe S iar C o mulțime de particule fiecare dintre ele fiind o copie independentă a unui proces Markov cu stările inițiale date, fiind posibil ca mai multe particule să pornească din orice stare dată i, deci dacă $p_i, q_j \in C$ sînt inițial respectiv în starea i sau j, atunci distanța dintre ele este $d(i, j)$. Totuși după un timp $t > 0$ distanța dintre ele nu poate fi determinată exact ci numai probabilitatea ca distanța dintre p_i, q_j să fie mai mică decît x. În fiecare moment $t \in T$ fiecare particulă din C este într-o stare din S și poziția sa în timp este guvernată de aceleași probabilități de trecere care determină procesul Markov $\{X_t : t \in T\}$. Pentru fiecare $i \in S$ vom nota cu p_i, q_j particulele din C care sînt în starea inițială i și vom obține că $p_i = q_j$ implică $i = j$ însă nu și reciproc.

Pentru fiecare $t \in T$ notăm prin $\mathcal{F}^{(t)} : C \times C \to \mathcal{R}^+$ aplicația definită prin

$$(2) \qquad \mathcal{F}^{(t)}(p_i, q_j) = \begin{cases} H_0, & p_i = q_i, \\ F_{ij}^{(t)}, & p_i \neq q_j \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

(unde $H_0(x) = 1$ pentru $x > 0$ și $H_0(x) = 0$ pentru $x \leqslant 0$) și oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$,

$$(3) \qquad F_{ij}^{(t)}(x) = P(d(p_i, q_j) < x \text{ la momentul } t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) \sum_{m;\, d(m,k)<x} P_{jm}(t)$$

Se verifică ușor că $F_{ij}^{(t)} \in \mathcal{R}^+$ și vom avea

Teorema 3.2.4. *Pentru orice* $t \in T$, $(C, \mathcal{F}^{(t)})$ *este un spațiu pseudometric probabilist de tip Šerstnev relativ la* τ_{T_m}.

Demonstrație. Relația de definiție (2) implică imediat că $\mathcal{F}^{(t)}(p_i, q_j) = \mathcal{F}^{(t)}(q_j, p_i)$. De asemenea dacă p_i, q_j, r_n sînt particule date din C și x un număr real dat, obținem că pentru orice $t \in T$ și orice $u, v \in \mathbf{R}$ cu $u + v = x$ avem

$$\mathcal{F}^{(t)}(p_i, r_n)(x) = P(d(p_i, r_n) < x \text{ la momentul } t)\ P(d(p_i, q_j) < u \text{ și}$$

$$d(q_j, r_n) < v \text{ la momentul } t) \geqslant \mathcal{F}^{(t)}(p_i, q_j)(u) + \mathcal{F}^{(t)}(q_j, r_n)(v) - 1.$$

Cum $\mathcal{F}^{(t)}(p_i, r_n)(x) \geqslant 0$ rezultă că $\mathcal{F}^{(t)}(p_i, r_n)(x) \geqslant T_m(\mathcal{F}^{(t)}(p_i, q_j)(u), \mathcal{F}(q_j, r_n)(v))$ și teorema este demonstrată.

Înlocuind relațiile Chapman-Kolmogorov (1) în (3) și schimbînd ordinea de sumare obținem

Teorema 3.2.5. *Fie* $\{F_{ij}^{(t)} : i, j \in S,\ t \in T\}$ *date de* (3), *atunci pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *și orice* $i, j \in S$ *și* $r, t \in T$ *avem*

$$(4) \qquad F_{ij}^{(r+t)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{im}(r)\, P_{jn}(t)\, F_{mn}^{(t)}(x)$$

sau sub formă matricială: $\mathbf{F}^{(r+t)}(x) = \mathbf{P}(r)\, \mathbf{F}^{(t)}(x)\, (\mathbf{P}(r))^T$, *unde* $(\mathbf{P}(r))^T$ *este transpusa matricii* $\mathbf{P}(r) = (P_{ij}(r))$.

Relația (4) ce leagă structura de PM-spațiu la momentul $(r+t)$ de cea de la momentul (t) sugerează studiul comportării asimptotice a repartițiilor $F_{ij}^{(t)}$ cînd $t \to \infty$ și avem

Teorema 3.2.6. *Fie* $\{\mathcal{F}^{(t)},\ t \in T\}$ *și* $\{F_{ij}^{(t)},\ i, j \in S,\ t \in T\}$ *definite în* (2) *și* (3) *și să presupunem că pentru orice* $i, j \in S$ *există* $G_{ij} \in \mathcal{R}^+$ *astfel încît* $F_{ij}^{(t)}(x) \xrightarrow{\text{sl.}} G_{ij}(x)$ *adică avem*

$$\mathcal{F}^{(t)}(p_i, q_j) \xrightarrow{\text{sl.}} \mathcal{F}(p_i, q_j) \text{ unde } \mathcal{F}(p_i, q_j) = \begin{cases} H_0, & p_i = q_j, \\ G_{ij}, & p_i \neq q_j \end{cases}$$

Atunci structura limită $(C, \mathcal{F})$ *este un spațiu pseudometric probabilist de tip Šerstnev relativ la* τ_{T_m}. *Mai mult, avem că*

$$(5) \qquad G_{ij}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{im}(t)\, P_{jn}(t)\, G_{mn}(x) \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbf{R} \textit{ și } t \in T.$$

Demonstrație. Faptul că $(C, \mathcal{F})$ este un spațiu pseudometric probabilist relativ la τ_{T_m} rezultă din aceea că $(C, \mathcal{F}^{(t)})$ are această proprietate pentru orice $t \in T$ și din continuitatea lui τ_{T_m} în topologia convergenței slabe pe $\mathcal{R}^+$.

Pentru a justifica relația (5) observăm că oricare ar fi $x \in \cap\, C(G_{ij})$, $C(G_{ij})$ fiind mulțimea punctelor de continuitate ale lui G_{ij}, prin trecere la limită pentru $t \to \infty$ în relația (4) rezultă (prin calcul direct sau folosind pro-

Scanned with OKEN Scanner

prietatea de intervertire a operației de sumare cu cea de limită) că (5) are loc pe o mulțime densă în $\mathbf{R}$. Pe de altă parte membrul drept fiind supremumul unei familii de funcții nedescrescătoare, continue la stînga, rezultă că această proprietate se păstrează pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și teorema este demonstrată.

În cazul lanțurilor Markov periodice, cu timp discret, pare mai natural să se considere limite de tip Cesàro și se obține

Teorema 3.2.7. *Fie* $\{F^{(t)}: t \in T = \{0, 1, \ldots\}\}$ *și* $\{F_{ij}^{(t)}: i, j \in S, t \in T\}$ *definite prin relațiile* (2) *și* (3). *Dacă pentru orice* $i, j \in S$ *există* $G_{ij} \in \mathcal{R}^+$ *astfel încît* $\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} F_{ij}^{(t)} \xrightarrow{\text{sl.}} G_{ij}$, *pentru* $k \to \infty$, *deci pentru orice* $p_i, q_j \in C$, $\mathcal{F}^{(t)}(p_i, q_j)$ *converg slab-Cesàro la* $\mathcal{F}(p_i, q_j)$ (*dat ca și în teorema* 3.2.6), *atunci structura limită* $(C, \mathcal{F})$ *este un spațiu pseudometric probabilist de tip Šerstnev relativ la* τ_{T_m} *iar* G_{ij} *verifică relația* (5) *pentru orice* $t \in T$.

Demonstrație. Pentru justificarea structurii limită $(C, \mathcal{F})$ este suficient să stabilim inegalitatea triunghiului relativ la τ_{T_m} și în acest scop definim

$$G_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} F_{ij}^{(t)}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

Folosind ipoteza că $(C, \mathcal{F}^{(n)})$ sînt spații pseudometrice probabiliste relativ la τ_{T_m} deducem, printr-un raționament de inducție, că pentru orice $i, j, k \in S$, $n > 0$, $n \in \mathbf{N}$ și $x \in \mathbf{R}$ avem

$$G_{ij}^{(n)}(x) \geqslant T_m(G_{ik}^{(n)}(u), G_{kj}^{(n)}(v))$$

oricare ar fi $u, v \in \mathbf{R}$ cu proprietatea $u + v = x$. Cum $G_{ij}^{(n)} \xrightarrow{\text{sl.}} G_{ij}$ și τ_{T_m} este continuă relativ la această convergență rezultă concluzia dorită.

Pe de altă parte din teorema 3.2.6 și relația (6) deducem că pentru orice $i, j \in S$ și $n \in T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ avem că

$$G_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{n+1} F_{ij}^{(1)} + \frac{1}{n+1}\sum_{t=2}^{n+1}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P_{im}(1)\, P_{jk}(1)\, F_{mk}^{(t-1)}\right] = \tag{7}$$

$$= \frac{1}{n+1} F_{ij}^{(1)} + \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P_{im}(1)\, P_{jk}(1)\sum_{t=1}^{n} F_{mk}^{(t)} = \frac{1}{n+1} F_{ij}^{(1)} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P_{im}(1)\, P_{jk}(1)\, G_{mk}^{(n)}.$$

Ținînd seama de faptul că $G_{ij}^{(n)} \xrightarrow{\text{sl.}} G_{ij}$ se poate repeta raționamentul din teorema anterioară adică prin trecere la limită în relația (7) se obține relația (5) pentru $t = 1$. Folosind această formulă și relația (1) prin inducție se deduce relația (7) pentru orice număr natural t și teorema este demonstrată.

Cu privire la nedegenerarea structurii asimptotice avem

Lema 3.2.1. *Fie* $\{F_{ij}^{(t)}: i, j \in S, t \in T\}$ *date prin* (3). *Dacă pentru orice* $i, j \in S$ *există* $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ *și pentru orice stare* $i \in S$ *avem că* $\sum_{j=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = 1$, *atunci pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *și* $i, j \in S$ *avem că*

$$\lim_{t\to\infty} F_{ij}^{(t)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} P_{ik}(t) \sum_{m;\, d(k,\, m)<x} P_{jm}(t)$$

convergența fiind uniformă relativ la x.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $p_{ij} = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$ pentru orice $i, j \in S$. Printr-un raționament standard deducem că, pentru i, j fixați, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există numerele naturale m și n astfel încît să avem

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik} > 1 - \varepsilon \text{ și } \sum_{k=0}^{n} p_{jk} > 1 - \varepsilon$$

Aplicînd teorema 3.2.6 obținem

Teorema 3.2.8. *Fie* $(C, \mathcal{F}^{(t)}: t \in T)$ *familia de spații pseudometrice probabiliste de tip Šerstnev definite de relația* (2), *atunci în ipotezele lemei* 3.2.1 *obținem că pentru orice* $p_i, q_j \in C$, $\mathcal{F}(p_i, q_j) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{F}^{(t)}(p_i, q_j)$ *există și* $(C, \mathcal{F})$ *este un spațiu pseudometric probabilist de tip Šerstnev, netrivial relativ la* τ_{T_m}.

Fie $T = \{0, 1, 2, ...\}$ deci cazul cînd parametrul timp este discret și amintim notațiile: $P_{ij} = P_{ij}(1)$ și $P_{ij}^n = P_{ij}(n)$ care se folosesc de obicei. Vom avea

Teorema 3.2.9. *Fie un lanț Markov neperiodic cu o mulțime finită de stări* $S = \{0, 1, ..., M\}$ *fiecare dintre ele fiind neabsorbantă și fie* $\{(C, \mathcal{F}^{(n)}): n = 0, 1, ...\}$ *definite prin* (2). *În acest caz există un număr natural* n_0 *astfel încît pentru orice* $n > n_0$, $(C, \mathcal{F}^{(n)})$, *este un spațiu pseudometric probabilist de tip Šerstnev relativ la* τ_{T_m}.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că pentru orice $i, j \subset S$ și $n > n_0$ avem că $F_{ij}^{(n)} \neq H_0$. Cum avem numai un număr finit de stări fiecare dintre ele fiind neperiodică și neabsorbantă rezultă [134, p. 44] că există un număr natural n_0 astfel că pentru orice stare i și $n > n_0$ avem că $0 < P_{ii}^n < 1$. În particular se deduce că pentru orice $i, j \in S$ date și orice $n > n_0$ există o stare $k \neq i$ astfel încît $P_{jk}^n > 0$. Alegînd pe x astfel încît să avem $0 < x < d(k, i)$ deducem din (3) că $F_{ij}^{(n)}(x) \leqslant 1 - P_{ii}^n P_{jk}^n < 1$ adică avem $F_{ij}^{(n)} \neq H_0$ ceea ce demonstrează teorema.

Rezultă că cu cît n este mai mare structura $(C, \mathcal{F}^{(n)})$ devine mai bine definită. De asemenea vom avea

Teorema 3.2.10. *Fiind dat un lanț Markov pozitiv recurent, ireductibil și neperiodic cu mulțimea stărilor finită sau numărabilă iar* $\{(C, \mathcal{F}^{(n)}): n = 0, 1, ...\}$ *definite cu ajutorul relației* (2) *și cu proprietatea că pentru orice stare* $k \in S$, *avem* $\pi_k = \lim_{n\to\infty} P_{kk}^n$, *atunci avem că*

$$\mathcal{F}(p_i, q_j) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^{(n)}(p_i, q_j)(x) = \begin{cases} H_0, & p_i = q_j, \\ G, & p_i \neq q_j \end{cases}$$

unde $G \in \mathcal{R}^+$ *este dată prin*

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{m;\, d(m,\, k) < x} \pi_m.$$

Demonstrație. Din (2) rezultă că trebuie să arătăm că pentru orice $i, j \in S$ și $x \in \mathbf{R}$ avem că $\lim_{n\to\infty} F_{ij}^{(n)}(x) = G(x)$. Acest rezultat se obține folosind lema 3.2.1 și ipotezele asupra lanțului Markov, care implică relația $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} P_{jj}^n = \pi_j > 0$ cu $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ [134, pag. 63—65].

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Funcțiile de repartiție limită nu depind de stările inițiale $i, j \in S$ și deci $(C, \mathcal{F})$ este un spațiu pseudometric probabilist echilateral. Dacă lanțul Markov nu este recurent adică admite stări nerecurente și fără proprietatea de ireductibilitate, adică admite mai multe clase de echivalență (mulțimi de stări care comunică între ele) teorema nu mai are loc. De exemplu, în cazul unei mulțimi finite de stări nerecurente și o familie finită sau numărabilă de clase $\{S_k : k = 1, 2, \ldots\}$ de stări pozitiv recurente și neperiodice se aplică lema 3.2.1 însă șirul funcțiilor de repartiție $\{F_{ij}^{(n)} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ converge, fără ca limita să mai fie independentă de stările inițiale i și j.

Pentru a prezenta unele proprietăți ale lanțurilor Markov periodice dăm mai întîi

Lema 3.2.2. *Fie* $\mathbf{P}$ *matricea probabilităților de trecere ale unui lanț Markov ireductibil, pozitiv recurent, cu perioada* $p \geqslant 1$ *și cu* S *finită sau numărabilă. Atunci avem*

a) *pentru orice stare* $i \in S$ *rezultă că* $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{np} = p\pi_i$ $0, 1/\pi_i$ *fiind timpul mediu de recurență pentru starea* i,

b) *pentru orice două stări* $i, j \in S$ *există o clasă de resturi* $I(i, j)$ *modulo* p, *astfel încît* $P_{ij}^{n} > 0$ *implică* $n = I(i, j) (\mathrm{mod}\ p)$,

c) *dacă pentru orice număr natural* m, $0 \leqslant m \leqslant p - 1$ *și orice starei definim* $B(i, m) = \{j \in S : I(i, j) = m\}$, *atunci pentru orice* $j \in B(i, m)$ *avem* $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{np+m} = p\pi_j$,

d) *pentru orice stare* i *și* m, $0 \leqslant m \leqslant p - 1$ *avem că* $\sum_{j \in B(i, m)} \pi_j = 1/p$.

Aceasta ne permite să demonstrăm

Teorema 3.2.11. *Pentru orice lanț Markov pozitiv recurent cu perioada* $p \geqslant 1$ *și cu o mulțime finită sau numărabilă de stări* S, *dacă se definește* $\{(C, \mathcal{F}^{(n)}) : n = 0, 1, \ldots\}$ *ca și în* (2) *iar* $\mathcal{F} : C \times C \to \mathcal{R}^+$ *pentru orice* p_i, $p_j \in C$, $x \in \mathbf{R}$ *prin*

$$\mathcal{F}(p_i, q_j)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathcal{F}^{(m)}(p_i, q_j)(x)$$

atunci $(C, \mathcal{F})$ *este un PM-spațiu de tip Šerstnev relativ la* τ_{T_m}. *Dacă* $p_i \neq q_j$ *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *atunci*

$$\mathcal{F}(p_i, q_j)(x) = p \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k \in B(i, m)} \pi_k \sum_{r \in B(j, m);\ d(r, k) < x} \pi_r \tag{8}$$

Demonstrație. Dacă alegem un număr natural m, $0 \leqslant m \leqslant p - 1$ atunci pentru orice stare i, conform lemei 3.2.2 avem că

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{np+m} = \sum_{j \in B(i, m)} \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{np+m} = \sum_{j \in B(i, m)} p\pi_j = 1.$$

De asemenea pe baza punctului b) din lema 3.2.2 și din lema 3.2.1 obținem că pentru orice stare i, j și $x \in \mathbf{R}$ avem

$$\lim_{n\to\infty} F_{ij}^{(np+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} P_{ik}^{np+m} \sum_{r;\ d(r, k) < x} \lim_{n\to\infty} P_{jr}^{np+m} = p^2 \sum_{k \in B(i, m)} \pi_k \sum_{r \in B(j, m);\ d(r, k) < x} \pi_r$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare putem scrie că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1}F_{ij}^{(np+m)}(x)=p\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{k\in B(i,\,m)}\pi_k\sum_{r\in B(j,\,m);\ d(r,\,k)<x}\pi_r \tag{9}$$

Deci se poate grupa şirul $\{F_{ij}^{(n)}: n=0, 1, \ldots\}$ în blocuri de p termeni consecutivi şi astfel că media blocului converge ca în (9). Rezultă uşor din faptul că fiecare şir $\{F_{ij}^{(n)}(x)\}$ este mărginit, că (8) are loc.

Cum fiecare $\pi_k>0$ şi $d(r, k)>0$ pentru stări distincte r, k rezultă din (8) (dacă neglijăm cazul trivial cînd avem cîte o singură stare în fiecare $B(i, m)$) că pentru $p_i\neq q_j$ avem $\mathcal{F}(p_i, q_j)\neq H_0$ şi utilizînd teorema 3.2.7 demonstraţia este încheiată.

Prin urmare în cazul acestei teoreme funcţiile de repartiţie limită $\{\mathcal{F}(p_i, q_j)\}$ nu sînt independente de i şi j deci $(C, \mathcal{F})$ nu este un PM-spaţiu echilateral. Pe de altă parte din lema 3.2.1 rezultînd că $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}P_{ij}^{m}=\pi_j$ obţinem că, în cazul lanţurilor Markov ireductibile, pozitiv recurente şi periodice, probabilitatea medie de a se afla într-o stare j este independentă de starea iniţială i însă probabilitatea medie ca două particule caracterizate de acelaşi lanţ Markov să fie la o distanţă mai mică decît x este independentă de stările lor iniţiale. În plus avem

Propoziţia 3.2.1. *Presupunînd îndeplinite ipotezele teoremei* 3.2. 11 *şi* G_{ij} *fiind dată de membrul drept al relaţiei* (8), *pentru orice* $i, j\in S$, *atunci pentru orice* $i_1, j_1, i_2, j_2\in S$ *cu proprietatea* $I(i_1, j_1)=I(i_2, j_2)$ *sau* $I(j_1, i_1)=I(i_2, j_2)$ *rezultă că* $G_{i_1j_1}=G_{i_2j_2}$.

Demonstraţie. Din ireductibilitatea lanţului Markov rezultă că pentru orice $i, j, k\in S$ există $m, n>0$ astfel că $P_{ij}^{m}>0$ şi $P_{jk}^{n}>0$ iar din relaţia Chapman-Kolmogorov deducem $P_{ik}^{m+n}\geqslant P_{ij}^{m}P_{jk}^{n}>0$. Lema 3.2.2 b) implică

$$I(i, j)+I(j, k)=I(i, k)\,(\mathrm{mod}\ p). \tag{10}$$

De asemenea, dacă ţinem seama de periodicitatea stării i deducem $I(i, i)=0$ şi deci relaţia (10) implică

$$I(i, j)=-I(j, i)(\mathrm{mod}\ p)\ \text{pentru orice}\ i, j\in S \tag{11}$$

Atunci presupunînd $I(i_1, j_1)=I(i_2, j_2)$ deducem din (10) şi (11) că

$$I(i_2, i_1)=I(i_2, j_2)+I(j_2, j_1)+I(j_1, i_1)\equiv I(j_2, j_1)(\mathrm{mod}\ p)$$

şi luînd $s=I(i_2, i_1)=I(j_2, j_1)$ obţinem că pentru orice m, $0\leqslant m\leqslant p-1$ şi $k\in B(i_1, m)$ avem că $I(i_2, i_1)+I(i_1, k)=s+m=I(i_2, k)\,(\mathrm{mod}\ p)$ adică $k\in B(i_2, (m+s)(\mathrm{mod}\ p))$. Inversînd raţionamentul obţinem că $B(i_1, m)=B(i_2, (m+s)(\mathrm{mod}\ p))$. De asemenea, din faptul că $s=I(j_2, j_1)$ deducem că pentru orice m, $0\leqslant m\leqslant p-1$ avem că $B(j_1, m)=B(j_2, (m+s)(\mathrm{mod}\ p))$. Obţinem astfel că mulţimile de perechi ordonate $(B(i_1, m), B(j_1, m))$; $0\leqslant m\leqslant p-1$ şi $(B(i_2, m), B(j_2, m))$, $0\leqslant m\leqslant p-1$ sînt identice ceea ce conform relaţiei (8) implică $G_{i_1j_1}=G_{i_2j_2}$.

În mod analog, dacă $I(j_1, i_1)=I(i_2, j_2)$, din simetria funcţiilor $\{G_{ij}\}$ şi justificările de mai sus deducem că $G_{i_1j_1}=G_{j_1i_1}=G_{i_2j_2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind relația (11) și numărînd valorile lui $I(i, j)$ care dau funcții de repartiție G_{ij} distincte, obținem următorul

Corolar. *PM-spațiul* $(C, \mathcal{F})$ *din teorema* 3.2.11 *are cel mult* $[p/2]+2$ *funcții de repartiție distincte (numărînd și pe* H_0 *iar* $[\cdot]$ = *funcția parte întreagă).*

Prin exemple se poate arăta că rezultatul corolarului este cel mai bun posibil.

Un rezultat important care arată că probabilitățile de trecere pot fi asimptotic degenerate însă PM-spațiul limită rămîne totuși propriu, este dat de

Teorema 3.2.12. *Fie un lanț Markov cu spațiul stărilor* S *numărabil și cu proprietatea că* $\prod_{i=0}^{\infty} P_{i,i+1} > 0$ *și* $P_{i,i+1} < 1$ *pentru o infinitate de stări* $i \in S$. *Dacă pe* S *se consideră o metrică* d *invariantă la translații (adică* $d(i+k, j+k) = d(i, j)$ *pentru orice* $i, j, k \in S$*) atunci familia* $(C, \mathcal{F}^{(n)})$, $n = 0, 1, \ldots$, *definită cu ajutorul relației* (2) *are ca limită un PM-spațiu netrivial* $(C, \mathcal{F})$ *de tip Šerstnev, relativ la* τ_{T_m}, *unde* $\mathcal{F}(p_i, q_j)(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^{(n)}(p_i, q_j)(x)$.

Demonstrație. Fie $c = \prod_{i=0}^{\infty} P_{i,i+1}$ astfel că $c > 0$. Amintim că o stare i este de trecere sau nerecurentă (tranzient) dacă probabilitatea întoarcerii în aceeași stare după un număr finit de pași este mai mică decît 1. Cum, evident, orice particulă p_i din C se mișcă către dreapta cu o probabilitate egală cel puțin cu c rezultă că toate stările din S sînt nerecurente și atunci se știe [134, p. 69] că

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = 0 \text{ pentru orice } i, j \in S \tag{12}$$

Rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un întreg n_0 astfel încît $\prod_{k=n}^{\infty} P_{k,k+1} > 1-\varepsilon$ iar din relația lui Chapman-Kolmogorov rezultă că pentru orice întreg n, dacă $i \geqslant n_0$ avem

$$P_{i,i+n}^{n} \geqslant \prod_{k=i}^{i+n-1} P_{k,k+1} \geqslant \prod_{k=n_0}^{\infty} P_{k,k+1} > 1-\varepsilon \tag{13}$$

care implică relația $\sum_{j\neq i+n} P_{ij}^{n} < \varepsilon$ pentru $i \geqslant n_0$. Folosind (13), invarianța la translații a metricii d și relația (3) obținem că pentru orice stări $i, j \geqslant n_0$ și orice întreg $n \geqslant 0$ avem că

$$F_{ij}^{(n)}(x) < 2\varepsilon \text{ dacă } d(i, j) \geqslant x \tag{14}$$

și

$$F_{ij}^{(n)}(x) > (1-\varepsilon)^2 > 1 - 2\varepsilon \text{ dacă } d(i, j) < x$$

Atunci din (12), pentru i și j fixate, rezultă existența unui întreg $M > 0$ astfel încît

$$\sum_{k=0}^{n_0} P_{ik}^{M} < \varepsilon \quad \text{și} \quad \sum_{m=0}^{n_0} P_{jm}^{M} < \varepsilon \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Combinînd (14) și (15) cu teorema 3.2.5 obținem că pentru $n \geqslant M$ și orice $x \in \mathbf{R}$ avem

$$\left| F_{ij}^{(n)}(x) - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \sum_{r=n_0+1}^{\infty} P_{ik}^{M} P_{jr}^{M} \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} P_{ik}^{M} P_{jr}^{M} F_{kr}^{(n-M)}(x) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \sum_{\substack{r=n_0+1 \\ d(k,r)<x}}^{\infty} P_{ik}^{M} P_{jr}^{M} \right| \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \sum_{\substack{r=n_0+1 \\ d(k,r)<x}}^{\infty} P_{ik}^{M} P_{jr}^{M} \left| F_{kr}^{(n-M)}(x) - 1 \right| +$$

$$+ \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \sum_{\substack{r=n_0+1 \\ d(k,r)\geqslant x}}^{\infty} P_{ik}^{M} P_{jr}^{M} F_{kr}^{(n-M)}(x) + 2\varepsilon < 4\varepsilon.$$

Deci pentru orice $n, m > M$ și $x \in \mathbf{R}$ avem că $|F_{ij}^{(n)}(x) - F_{ij}^{(m)}(x)| < 8\varepsilon$ adică $\{F_{ij}^{(n)}(x) : n = 1, 2, \ldots\}$ este un șir Cauchy pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și atunci el este și convergent. Am dedus astfel că șirul este uniform convergent relativ la x și putem defini $G_{ij}(x) = \lim_{n\to\infty} F_{ij}^{(n)}(x)$ cu $G_{ij} \in \mathcal{R}^+$. Din relația (2) deducem că pentru $n \to \infty$ avem că $\mathcal{F}^{(n)}(p_i, q_j) \to \mathcal{F}(p_i, q_j)$, $\mathcal{F}(p_i, q_j)$ avînd aceeași formă ca și funcția limită din teorema 3.2.6. De altfel din aceeași teoremă rezultă că pentru a arăta că $(C, \mathcal{F})$ este un PM-spațiu relativ la τ_{T_m} trebuie să arătăm că $G_{ij} \neq H_0$ pentru orice $i, j \in S$. Pentru aceasta observăm că dacă particulele $p_i \neq p_j$ sînt inițial în stări diferite $i \neq j$, atunci probabilitatea ca ele să se miște tot timpul spre dreapta este cel puțin $c^2 > 0$. Astfel din invarianța la translații a metricii d rezultă că aceasta rămîne constantă și egală cu $d(i, j) > 0$. Cum pentru $0 < x < d(i, j)$ avem $G_{ij}(x) \leqslant 1 - c^2 < 1$ rezultă că $G_{ij} \neq H_0$. În cazul cînd particulele distincte p_i, q_j ocupă inițial aceeași stare $i = j$, din ipoteza teoremei, rezultă că există o probabilitate pozitivă ca p_i, q_j să se miște spre dreapta pînă ce ele ating o stare m din care este posibil să cadă în stările $k \neq r$ în pasul următor și deci p_i, q_j se mișcă mereu spre dreapta, distanța dintre ele rămînînd tot timpul aceeași egală cu $d(r, k) > 0$ și deci $G_{ij} \neq H_0$.

Pe de altă parte deducem în mod similar că pentru orice stări i, j cu $x > d(i, j)$ avem $G_{ij}(x) \geqslant c^2 > 0$. De fapt G_{ij} fiind limita uniformă a unor funcții de repartiție cu supremumul 1 și ea are această proprietate adică PM-spațiul limită $(C, \mathcal{F})$ este netrivial și teorema este demonstrată.

Observație. Se pot reface raționamentele și pentru cazul cînd mulțimea de particule C are proprietatea că fiecare generează un lanț sau proces Markov diferit pe același spațiu de stări S.

O altă abordare privind conexiunea dintre PM-spații și procese aleatoare îi aparține lui G. Sâmboan [231] care introduce noțiunea de t-normă pozitiv definită pentru acele t-norme T pentru care oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ și $b_i \geqslant a_i$, $a_i, b_i \in [0, 1]$, $1 \leqslant i \leqslant n$ avem

$$\mathop{\mathrm{T}}_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i} b_1 \mathrm{T} \ldots \mathrm{T} b_{i-1} \mathrm{T} a_i \mathrm{T} b_{i+1} \mathrm{T} \ldots \mathrm{T} b_n +$$

$$+ \sum_{i \neq j} b_1 \mathrm{T} \ldots \mathrm{T} b_{i-1} \mathrm{T} a_i \mathrm{T} b_{i+1} \mathrm{T} \ldots \mathrm{T} b_{j-1} \mathrm{T} a_j \mathrm{T} b_{j+1} \mathrm{T} \ldots \mathrm{T} b_n +$$

$$+ \ldots + (-1)^n \mathop{\mathrm{T}}_{i=1}^{n} a_i \geqslant 0,$$

unde $\mathop{\mathrm{T}}_{i=1}^{n} a_i = a_1 \mathrm{T} a_2 \mathrm{T} \ldots \mathrm{T} a_n$ și obține rezultatele pe care le prezentăm mai jos.

Scanned with OKEN Scanner

Evident că T_m, Prod, Min sînt pozitiv definite spre deosebire de T_w care nu are această proprietate. Legătura dintre t-normele pozitiv definite și funcțiile de repartiție comune este dată de

Propoziția 3.2.2. *Fie T o t-normă pozitiv definită și funcțiile de repartiție reale F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, atunci aplicația $(x_1, \ldots, x_n) \to F_1(x_1) \top F_2(x_2) \top \ldots \top F_n(x_n)$ este o funcție de repartiție n-dimensională.*

Demonstrație. Evident că $F(x_1, \ldots, x_n) = \overset{n}{\underset{i=1}{\top}} F_i(x_i)$ este monoton crescătoare în raport cu fiecare variabilă iar din proprietatea că t-norma este pozitiv definită deducem că pentru orice $y_i \geqslant x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, avem că

$$F(y_1, \ldots, y_n) - \sum_i F(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) + \ldots +$$

$$+ (-1)^n F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$$

Celelalte proprietăți caracteristice pentru funcții de repartiție n-dimensional fiind ușor de dedus, propoziția este demonstrată.

Teorema 3.2.13. *Fiind dat un spațiu arbitrar S și o aplicație $(s, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_{st}$ cu proprietățile* a) $F_{st} = F_{ts}$, b) $F_{ss} = H_0$ *iar $\top$ o t-normă pozitiv definită și cu proprietatea* $\sup_{x<1} x \top x = 1$, *atunci aplicației $\mathcal{F}$ și t-normei $\top$ îi corespunde un proces aleator $\{X_s : s \in S\}$ cu valori într-un spațiu metric $(\mathcal{X}, d)$ pentru care $P(d(X_s, X_t) < x) = F_{st}(x)$ și care determină pe S o structură de spațiu Menger.*

Demonstrație. Fie $\Omega = \{\omega : S \times S \to [0, \infty),\ \omega \in$ mulțimii $\mathcal{D}$ a tuturor metricilor pe $S\}$ și fie pentru fiecare $(s, t) \in S \times S$ aplicația $Y_{st}(\omega) = \omega(s, t)$. Pe spațiul Ω considerăm σ-algebra $\mathcal{K}$ generată de mulțimile $\{\omega : Y_{s_1t_1} \in B_1, Y_{s_2t_2} \in B_2, \ldots, Y_{s_nt_n} \in B_n\}$, $B_i \in \mathcal{B}([0, \infty)) = \mathcal{B}(R_+)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Rezultă că aplicațiile $\omega \to Y_{st}(\omega)$ sînt $\mathcal{K}$-măsurabile.

Pentru construirea unei probabilități P pe $\mathcal{K}$ se consideră P_0 definită pe generatorii lui $\mathcal{K}$ prin

$$P_0(Y_{s_1t_1} \in B_1, \ldots, Y_{s_nt_n} \in B_n) = \iint_{B_1 \times \ldots \times B_n} \ldots \int \mathrm{d}(F_{s_1t_1} \top F_{s_2t_2} \ldots \top F_{s_nt_n}).$$

Rezultă de aci că $P_0(Y_{st} \in [0, x),\ Y_t \in [0, y)) = \int_{[0, x] \times [0, y]} \mathrm{d}(F_{st} \top F_{tn}) =$

$= F_{st}(x) \top F_{tu}(y)$ și ținînd seama de inegalitatea $Y_{su} \leqslant Y_{st} + Y_{tu}$ obținem $F_{st}(x) \top F_{tu}(y) \leqslant F_{su}(x + y)$. Deci aplicația $(s, t) \to F_{st}$ verifică axioma triunghiului a lui Menger.

Pentru o mulțime borelianăă $B \in \mathcal{B}^n(\mathbf{R}^n)$ vom pune

$$P_0((Y_{s_1t_1}(\omega), \ldots, Y_{s_nt_n}(\omega)) \in B) = \int_B \mathrm{d}(F_{s_1t_1} \top \ldots \top F_{s_nt_n})$$

probabilitatea P pe σ-algebra $\mathcal{K}$ obținîndu-se prin prelungirea lui P_0 pe baza teoremei lui Kolmogorov. Vom avea că $P(Y_{st} < x) = F_{st}(x)$ și $F_{s_1s_2}(x_1) \top \top F_{s_2s_3}(x_2) \top \ldots \top F_{s_{n-1}s_n}(x_{n-1}) \top F_{s_1s_n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})$.

Pentru fiecare $\omega \in \mathcal{D}$ și $s \in S$ fixați, să notăm $X_s(\omega) : t \to Y_{st}(\omega) = \omega(s, t)$. Se vede că $X_s(\omega) \in R_+$, $X_s(\omega)$ fiind aplicația parțială a aplicației $(s, t) \to \omega(s, t)$. Procesul aleator căutat este $\{X_s, s \in S\}$

Scanned with OKEN Scanner

Luînd în $\mathbf{R}_+^S$ subspațiul $\mathscr{X}$ format cu $\{X_s(\omega),\ s\in S,\ \omega\in\Omega\}$, definim distanța d prin $d(X_s(\omega), X_{s'}(\omega')) = \sup_t |(X_s(\omega) - X_{s'}(\omega'))(t)| = \sup_t |\omega(s, t) - \omega(s', t)|$.

Se vede că $d(X_s(\omega), X_{s'}(\omega) = \omega(s, s') = Y_{ss'}(\omega)$ și prin urmare repartiția variabilei aleatoare $d(X_s(\omega), X_{s'}(\omega))$ este $F_{ss'}$ iar aplicația $(s, t) \to F_{st}$ îndeplinește axiomele spațiului Menger pe S și teorema este demonstrată.

Legătura inversă dintre procesele aleatoare și metricile aleatoare deduse din t-norme pozitiv definite este dată de

Propoziția 3.2.3. *Dacă $\{X_s : s\in S\}$ este un proces aleator cu valori într-un spațiu metric separabil $(\mathscr{X}, d)$ pentru care $M(d(X_s, X_t)) < \infty$ atunci există o t-normă pozitiv definită față de care S devine spațiu Menger.*

Demonstrație. Fie G o funcție de repartiție continuă și cu proprietatea că $G(0) = 0$. Dacă punem

$$F_{st}(x) = \begin{cases} G\left(\dfrac{x}{M(Y_{st})}\right) & \text{pentru } s \neq t, \\ H_0 & \text{pentru } s = t \end{cases}$$

atunci S devine spațiu Menger relativ la t-norma Min.

§ 3. ELEMENTE DE TOPOLOGIE PROBABILISTĂ

3.1. TOPOLOGII PROBABILISTE PE *PM*-SPAȚII

B. Schweizer și A. Sklar au pus bazele topologiei probabiliste considerînd ca naturală topologia definită de sistemul (ε, λ)-vecinătăților [233] prezentat în secțiunea 1.3.2. Această structură de vecinătăți definește o bază de vecinătăți pentru o topologie Hausdorff și chiar metrizabilă, în cazul spațiilor Menger cu proprietatea că $\sup_{x<1} T(x, x) = 1$. Este evident că pe lîngă aceasta utilitatea ei este limitată la acele spații în care pentru orice $\varepsilon > 0$ este asigurată existența unor perechi de puncte distincte pentru care probabilitatea ca distanța dintre ele să fie mai mică decît ε este mai mică decît $1 - \lambda$. Există spații (cum sînt C-spațiile) în care această topologie devine discretă.

D. Mushtari și A. N. Šerstnev [189] introduc o topologie similară pentru spații Šerstnev precum și cea mai slabă topologie în care aplicația $q \to 1 - F_{pq}$ este continuă pentru orice $p\in S$ iar $\mathscr{Q}$ fiind înzestrată cu topologia convergenței slabe. Ei studiază legătura dintre cele două topologii și sugerează că și metoda de topologizare a lui I. Kurosaki [148] se încadrează într-o schemă asemănătoare, ea asigurînd și continuitatea lui F_{pq} relativ la perechea (p, q).

E. Thorp [282] și ulterior R. Fritsche [84], [85] abordează problema topologizării plecînd de la ideea că structura topologică generalizată introdusă de A. Appert și Ky-Fan [3] ar oferi cadrul natural de generalizare al topologizării structurilor probabiliste. Ideea ingenioasă a lui R. Fritsche de a folosi ca instrument de bază, în definirea topologiilor, o funcție $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1]$ și nedescrescătoare, numită *funcție-profil*, oferă noi posibilități de abordare și de studiu topologic al *PM*-spațiilor. Sistemul de vecinătăți folosit de E. Thorp și R. Fritsche este lipsit de axioma sistemelor obișnuite care asigură existența unei vecinătăți conținută în intersecția fiecărei perechi de vecinătăți date

Scanned with OKEN Scanner

ale unui punct dat. Cu toate acestea, ideea utilizării unor funcții profil permite evitarea neajunsurilor sesizate la topologia lui Schweizer și Sklar. De asemenea funcțiile profil i-au permis lui R. Tardiff să definească o structură de vecinătăți, care înlătură neajunsul privind axioma amintită și dă posibilitatea introducerii unor operatori de închidere.

Amintim că ideea definirii unor operatori de închidere pentru introducerea unor structuri topologice cu interpretări probabiliste și caracterizate de mulțimi fuzzy este fructificată într-un mod interesant de M. J. Frank în [80].

Rezultate importante privind topologizarea probabilistă prin metoda operatorilor de închidere și a funcțiilor profil, obținute de R. Tardiff stabilesc legătura dintre topologiile probabiliste și topologiile în sensul lui Cech sau Kuratowski.

Prin *spațiu cu închidere* vom înțelege, în cele ce urmează, o pereche (S, C) unde $C: \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ cu proprietățile:

$C_1)$ $C(\varnothing) = \varnothing$,

$C_2)$ $A \subseteq C(A)$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(S)$,

$C_3)$ $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$ pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(S)$.

Cum, în general, $C(C(A)) \neq C(A)$ rezultă că C nu este un operator de închidere în sensul lui Kuratowski dar putem vorbi de *mulțimi C-închise* $A \in \mathcal{P}(S)$ ca fiind acelea pentru care $C(A) = A$ și *C-deschise* dacă $S - A$ este C-închisă iar prin $\mathrm{Int}(A)$ vom înțelege mulțimea $S - C(S - A)$.

Se poate arăta ușor că familia $\mathcal{C}$ a părților C-închise din S este închisă relativ la reuniuni finite și intersecții arbitrare. Dacă pentru orice $A \in \mathcal{P}(S)$ notăm prin $\mathcal{B}_A = \{B \in \mathcal{C} : A \subseteq B\}$ și $C^*(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_A} B$ atunci C^* este un operator de închidere în sensul lui Kuratowski (adică posedă proprietățile $C_1) - C_3)$ și $C^*(C^*(A)) = C^*(A)$). Dacă A este C-închisă atunci A este și C^*-închisă și este posibil ca $C(A) \subsetneq C^*(A)$.

Un spațiu cu închidere poate fi caracterizat și printr-o structură de vecinătăți dacă se definește *C-vecinătate a lui* $p \in S$ ca fiind orice $V \subseteq S$ cu proprietatea că $p \in \mathrm{Int}\,(V)$. Familia tuturor C-vecinătăților lui p se numește *sistemul C-vecinătăților lui* p notat prin $\mathcal{V}_C(p)$. O *bază locală pentru* $\mathcal{V}_C(p)$ este orice familie $\mathcal{U}$ de C-vecinătăți ale lui p echivalentă cu $\mathcal{V}_C(p)$ față de relația de ordine definită de finețea sistemului. *Sistemul C-vecinătăților* $\mathcal{V}_C$ este familia $\bigcup_{q \in S} \mathcal{V}_C(q)$ iar o bază pentru $\mathcal{V}_C$ este orice familie $\mathcal{U}$ de C-vecinătăți cu proprietatea că pentru orice $p \in S$ există o subfamilie $\mathcal{U}(p)$ a lui $\mathcal{U}$ care este o bază locală în p.

Se arată că pentru orice spațiu cu închidere (S, C) avem că $\mathcal{V}_C(p)$, $p \in S$, posedă proprietățile:

$V_1)$ $\mathcal{V}_C(p)$ nu este vidă,

$V_2)$ pentru fiecare $V \in \mathcal{V}_C(p)$ avem că $p \in V$,

$V_3)$ pentru orice $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_C(p)$ există $V_3 \in \mathcal{V}_C(p)$ astfel încît $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

Definiția 3.3.1. Fie $S \neq \varnothing$ și să presupunem că pentru fiecare $p \in S$ există o familie $\mathcal{U}(p)$ de părți ale lui S. Atunci prin $C_{\mathcal{U}}$ se înțelege aplicația definită pe $\mathcal{P}(S)$ cu valori în $\mathcal{P}(S)$ prin $C_{\mathcal{U}}(A) = \{q \in S : U \cup A \neq \varnothing$ pentru fiecare $U \in \mathcal{U}(q)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

O metodă de generare a spațiilor cu închidere rezultă din definiția de mai sus și din [280] teorema 1.10 care asigură că dacă într-o mulțime nevidă S pentru fiecare $p \in S$ există o familie de părți $\mathcal{U}(p)$ care satisface proprietățile V_1) — V_3) atunci $(S, C_{\mathcal{U}})$ este un spațiu cu închidere în care $\mathcal{U}(p)$ constituie o bază locală pentru $\mathcal{V}_{C_{\mathcal{U}}}(p)$, $p \in S$ iar dacă există o altă familie $\mathcal{U}'(p)$, $p \in S$, echivalentă cu $\mathcal{U}(p)$ atunci $C_{\mathcal{U}}(A) = C_{\mathcal{U}'}(A)$ pentru fiecare $A \subseteq S$.

Într-un spațiu cu închidere (S, C), C-închiderea $C(A)$, $A \subseteq S$, este C-închisă dacă și numai dacă are loc

V_4) pentru fiecare $p \in S$ și fiecare $V \in \mathcal{V}_C(p)$ există $U \in \mathcal{V}_C(p)$ astfel încît $q \in U$ implică existența unui $W \in \mathcal{V}_C(q)$ cu proprietatea $W \subseteq V$.

Definiția 3.3.2. Fie $(S, \mathcal{F})$ un spațiu semimetric probabilist (fără inegalitatea triunghiului), $\varphi \in \mathcal{R}^+$ și $\varepsilon > 0$; atunci pentru fiecare $p \in S$ avem că

1) mulțimea $V_p(\varphi, \varepsilon) = \{q \in S : F_{pq}(x + \varepsilon) + \varepsilon \geqslant \varphi(x), \ x \in [0, 1/\varepsilon)\}$ se numește (φ, ε)-vecinătate a lui p,

2) familia $\mathcal{V}_\varphi(p) = \{\mathcal{V}_p(\varphi, \varepsilon), \ \varepsilon > 0\}$ se numește *sistemul vecinătăților lui* p iar $\mathcal{V}_\varphi = \{\mathcal{V}_\varphi(p), \ p \in S\}$ se numește *sistemul vecinătăților*.

Funcția φ se numește *funcție-profil* și valoarea sa în x, $\varphi(x)$, se interpretează ca valoarea maximă a probabilității asociată evenimentului ca distanța dintre p și q să fie mai mică decît x.

Teorema 3.3.1. *Fie $(S, \mathcal{F})$ un spațiu semimetric probabilist iar φ și Ψ două funcții profil, atunci dacă pentru orice $A \subseteq S$ notăm prin $C_\varphi(A) = \{p \in S : V_p(\varphi, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ pentru fiecare $\varepsilon > 0\}$, (S, C_φ) va fi un spațiu cu închidere având o bază locală numărabilă în fiecare punct $p \in S$. Dacă $\varphi \geqslant \Psi$ atunci $C_\varphi(A) \subseteq C_\Psi(A)$ pentru fiecare $A \subseteq S$.*

Demonstrație. Fie $p \in S$, cum $F_{pp} = H_0$, proprietățile V_1) și V_2) sînt imediate iar pentru a arăta V_3) să observăm că dacă $q \in V_p(\varphi, \delta)$ și dacă $\eta > \delta$ atunci $F_{pq}(x + \eta) + \eta \geqslant F_{pq}(x + \delta) + \delta \geqslant \varphi(x)$ pentru orice $x \in [0, 1/\delta) \supset \supset [0, 1/\eta)$ adică $q \in V_p(\varphi, \eta)$ și $V_p(\varphi, \delta) \subseteq V_p(\varphi, \eta)$. Deci pentru orice $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ avem că $V_p(\varphi, \min(\varepsilon, \varepsilon')) \subseteq V_p(\varphi, \varepsilon) \cap V_p(\varphi, \varepsilon')$ și V_3) este justificată. Din definiția 3.3.1 și comentariul ce-o urmează rezultă că (S, C_φ) este un spațiu cu închidere.

Familia $\mathcal{V}(p) = \{V_p(\varphi, r), \ r = \text{număr rațional}\}$ este o bază locală pentru $\mathcal{V}_\varphi(p)$. Ultima afirmație se justifică prin observația că dacă $\varphi \geqslant \Psi$ atunci $V_p(\varphi, \varepsilon) \subseteq V_p(\Psi, \varepsilon)$ pentru fiecare $\varepsilon > 0$ și deci $C_\varphi(A) \subseteq C_\Psi(A)$ și teorema este demonstrată.

Rezultă că fiecare funcție-profil $\varphi \in \mathcal{R}^+$ definește pe un spațiu semimetric probabilist $(S, \mathcal{F})$ un operator de închidere care la rîndul său induce o topologie naturală pe S ceea ce constituie o îmbunătățire a teoremei 3.1 din [85] în care s-au impus anumite restricții pentru φ.

Să asociem fiecărei funcții $F \in \mathcal{R}^+$ și $h \in [0, 1]$ o nouă funcție F^h din $\mathcal{R}^+$ dată prin

$$F^h(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \leqslant 0, \\ \min(F(x + h) + h, 1), & \text{pentru } x \in \left(0, \dfrac{1}{h}\right], \\ 1, & \text{pentru } x > \dfrac{1}{h}, \end{cases}$$

și să observăm că $F^0 = F$, $F^1 = H_0$ și $d_{\mathcal{L}}(F, F^h) \leqslant h$ pentru orice $F \in \mathcal{R}^+$ și orice $h \in [0, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

Lema 3.3.1. *Dacă* $\mu : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+ \to R^+$ *este o funcție triunghiulară continuă, atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un* $\delta_0 > 0$ *astfel încît pentru orice* $\delta < \delta_0$ *și orice* $(F, G) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+$ *să avem*

$$d_{\mathcal{L}}(\mu(F, G), \mu(F^\delta, G^\delta)) < \varepsilon.$$

Demonstrația acestei leme rezultă din faptul că $(\mathcal{R}^+, d_{\mathcal{L}})$ este compact și μ fiind continuă este și uniform continuă.

Din definiția (φ, ε)-vecinătăților și a funcției F^h deducem că dacă φ este o funcție-profil avem că $q \in V_p(\varphi, \varepsilon)$ dacă și numai dacă $F^\varepsilon_{pq} \geqslant \varphi$, $p, q \in S$.

Teorema 3.3.2. *Fie* (S, F) *un spațiu semimetric probabilist,* φ *o funcție-profil și* $p, q \in S$, *atunci avem că* $q \in C_\varphi(\{p\})$ *dacă și numai dacă* $F_{pq} \geqslant \varphi$.

Demonstrație. În adevăr, $q \in C_\varphi(\{p\})$ dacă și numai dacă $p \in V_q(\varphi, \varepsilon)$ pentru orice $\varepsilon > 0$ deci, dacă și numai dacă $F^\varepsilon_{pq} \geqslant \varphi$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Cum F_{pq} este nedescrescătoare și continuă la stînga rezultă că $F^\varepsilon_{pq} \geqslant \varphi$ pentru orice $\varepsilon > 0$ dacă și numai dacă $F^\varepsilon_{pq} \geqslant \varphi$. Obținem astfel următoarea caracterizare a axiomei de separație T_1 pentru sistemul de vecinătăți $\mathcal{V}_\varphi$ similară celei din [283, teorema 3.4] și [85, teorema 3.3].

Consecință. $\mathcal{V}_\varphi$ satisface axioma de separație T_1 dacă și numai dacă pentru orice $p, q \in S$, $p \neq q$, există un $x_{pq} > 0$ astfel încît $F_{pq}(x_{pq}) < \varphi(x_{pq})$.

Teorema 3.3.3. *Fie* $(S, \mathcal{F}, \mu)$ *un spațiu Šerstnev cu* μ *continuă și* φ, Ψ *două funcții-profil, atunci pentru fiecare* $p \in S$ *și* $\varepsilon > 0$ *există un* $\delta > 0$ *astfel încît să avem că* $q \in V_p(\Psi, \delta)$ *implică* $V_q(\varphi, \delta) \subseteq V_p(\mu(\varphi, \Psi), \varepsilon)$ *și pentru fiecare* $A \subseteq S$, $C_\Psi(C_\varphi(A)) \subseteq C_{\mu(\varphi, \Psi)}(A)$.

Consecință. Dacă $(S, \mathcal{F}, \mu)$ este un spațiu Šerstnev cu μ continuă și $\mu(\varphi, \varphi) = \varphi$ pentru o funcție-profil φ, atunci C_φ este un operator de închidere de tip Kuratowski.

Demonstrație. Cum $A \subseteq C(A)$ pentru orice $A \subseteq S$, din teorema de mai sus avem că

$$C_\varphi(A) \subseteq C_\varphi(C_\varphi(A)) \subseteq C_{\mu(\varphi, \varphi)}(A) = C_\varphi(A)$$

Observație. Dacă $\varphi = H_0$, atunci C_φ este un operator Kuratowski pe $(S, \mathcal{F}, \mu)$ cu μ continuă.

În termenii vecinătăților consecința de mai sus revine la verificarea condiției V_4) pentru $\mathcal{V}_\varphi$.

Această formulă arată că astfel se obține o generalizare a teoremei 7.2 din [233] (cazul $\varphi = H_0$), a teoremei 3.13 din [283] și a teoremei 3.2 din [85] (cazul $\varphi = kH_0$, $0 < k \leqslant 1$).

Acest rezultat este cel mai bun posibil pentru funcții triunghiulare continue după cum se poate arăta prin exemple [280, ex. 2.13].

Un rezultat care generalizează pe cele cunoscute din [233, teorema 2], [283, teorema 3.14], [85, teorema 3.2] este dat de

Teorema 3.3.4. *Fie* $(S, \mathcal{F}, \mu)$ *un spațiu Šerstnev cu* μ *continuă și* φ *o funcție-profil, atunci avem:*

1) *dacă* $\mu(\varphi, \varphi) = \varphi$ *rezultă că structura cu închidere indusă de* C_φ *este pseudometrizabilă iar cînd* $C_\varphi(\{p\}) = \{p\}$ *pentru fiecare* $p \in S$ *ea este metrizabilă,*

2) *dacă* $\mathcal{V}_{\mu(\varphi, \varphi)}$ *verifică axioma de separație* T_1 *atunci* $\mathcal{V}_\varphi$ *verifică axioma de separație* T_2.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste noi structuri i-au permis lui R. Tardiff [280] să extindă rezultatele lui R. Egbert [69] privind produsele de PM-spații, diametrii probabiliști și metrica probabilistă a lui Hausdorff care este folosită la definirea unor relații mai generale privind discernabilitatea în PM-spații.

3.2. CONTINUITATEA METRICII PROBABILISTE ȘI PROBLEMA COMPLETITUDINII PM-SPAȚIILOR

Se știe că orice spațiu metric admite o completare unică abstracție făcînd de o izometrie și că această proprietate depinde în mod esențial de completitudinea spațiului valorilor $[0, \infty)$, de continuitatea operației de adunare prin care este formulată inegalitatea triunghiului precum și de uniform continuitatea metricii.

Continuitatea metricii $\mathcal{F}$ atît ca funcție de $(p, q) \in S \times S$, pentru x fixat, cît și sub raportul comportării lui $F_{pq}(x)$ a fost studiată de B. Schweizer și A. Sklar [233].

Ulterior în [243] se demonstrează pentru spații Menger un rezultat asemănător celui de mai jos.

Teorema 3.3.5. *Fie* $(S, \mathcal{F}, T)$ *un spațiu Menger nearhimedian în care* T *are proprietatea că* $\lim_{x \to 1} T(a, x) = a$ *uniform pe* $[0, 1]$, $S \times S$ *înzestrată cu topologia indusă de* (ε, λ) *— topologia pe* S *și pe* $\mathcal{R}_v^+$ *topologia indusă de metrica Lévy* d_L, *atunci distanța probabilistă nearhimediană* $F : S \times S \to \mathcal{R}_v^+$ *este uniform continuă.*

Demonstrație. Din faptul că $T(a, x) \to a$ uniform, cînd $x \to 1$, rezultă că există $\lambda \in (0, 1)$ astfel încît $T(a, 1-\lambda) > a - \varepsilon/2$ pentru orice $a \in [0, 1]$ și $\varepsilon > 0$ fixat. Fie $p, q \in S$ și $p' \in V_p(\varepsilon, \lambda)$ iar $q' \in V_q(\varepsilon, \lambda)$, atunci pentru orice $x \geqslant 0$ avem că $F_{p'q'}(x+\varepsilon) \geqslant T(F_{p'q}(x+\varepsilon), F_{qq'}(\varepsilon)) \geqslant T(T(F_{p'p}(x+\varepsilon), F_{pq}(x)), F_{qq'}(\varepsilon)) \geqslant T(T(1-\lambda, F_{pq}(x)), 1-\lambda) \geqslant T(F_{pq}(x), 1-\lambda) - \varepsilon/2 > F_{pq}(x) - \varepsilon$ adică $F_{pq}(x) < F_{p'q'}(x + \varepsilon) + \varepsilon$.

De asemenea pentru $x > \varepsilon$ putem scrie că

$$F_{pq}(x) \geqslant T(F_{pp'}(x), F_{p'q}(x)) \geqslant T(F_{pp'}(\varepsilon), T(F_{p'q'}(x - \varepsilon), F_{q'q}(x))) =$$

$$= T(T(F_{p'q'}(x - \varepsilon), F_{pp'}(\varepsilon)), F_{q'q}(x)) \geqslant T(T(F_{p'q'}(x-\varepsilon), F_{pp'}(\varepsilon)), F_{q'q}(\varepsilon)) \geqslant$$

$$\geqslant T(T(F_{p'q'}(x-\varepsilon), 1-\lambda, 1-\lambda) > T(F_{p'q'}(x-\varepsilon), 1-\lambda) - \varepsilon/2 > F_{p'q'}(x-\varepsilon) - \varepsilon$$

iar pentru $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ avem că $F_{pq}(x) > F_{p'q'}(x-\varepsilon) - \varepsilon = -\varepsilon$. Deci pentru orice $x > 0$ vom avea că $F_{pq}(x) > F_{p'q'}(x-\varepsilon) - \varepsilon$ care împreună cu inegalitatea obținută în prima parte ne dă $d_L(F_{pq}, F_{p'q'}) < \varepsilon$ ceea ce este echivalent cu continuitatea lui $\mathcal{F}$ în $(p, q) \in S \times S$ și cum λ nu depinde decît de ε, teorema este demonstrată.

Consecință. Dacă $(S, \mathcal{F}, T)$ este un spațiu Menger nearhimedian cu T continuă sau mai tare decît o t-normă continuă atunci $\mathcal{F} : (S \times S, (\varepsilon, \lambda) - \text{topologia}) \to (\mathcal{R}_v^+, d_L)$ este uniform continuă. Rezultate asemănătoare pentru spații Šerstnev sînt lema 3.3.1 sau în [259], [189] și pentru SM-spații în [35].

Să prezentăm acum cîteva dintre rezultatele privind problema completitudinii structurilor probabiliste amintind că un PM-spațiu $(S, \mathcal{F})$ este

Scanned with OKEN Scanner

complet dacă orice șir Cauchy este convergent în S. Un PM-spațiu $(S^*, \mathcal{F}^*)$ se numește *completatul* lui $(S, \mathcal{F})$ dacă $(S, \mathcal{F})$ este izometric cu o submulțime densă a lui $(S^*, \mathcal{F}^*)$. Problema completitudinii PM-spațiilor, spațiilor de tip Șerstnev în limbajul metricii probabiliste a fost rezolvată de H. Sherwood [257], [259]. Rezultate privind completitudinea au fost obținute și de D. Mushtari [190] care consideră uniformități ce apar în mod natural pe PM-spații și definește o metrică probabilistă pe completata structurii uniforme care este o extensie a metricii probabiliste de pe spațiul inițial. El arată că metrica probabilistă extinsă definește o structură uniformă care coincide cu extensia structurii inițiale. În afară de uniformitatea $\mathcal{U}$ definită în [234] se definește ceă care are ca bază sistemul $\mathcal{U}^* = \{U_\varepsilon^*, \varepsilon > 0\}$, $U_\varepsilon^* = \{(p; q): d_L(F_{pr}, F_{rq}) \leqslant \varepsilon$ pentru orice $r \in S\}$ pentru care avem $\mathcal{U}^* \geqslant \mathcal{U}$ însă dacă familia de aplicații $G \to (G, G'), G' \in \mathcal{G}$ este egal continuă în H° rezultă că $\mathcal{U}$ și $\mathcal{U}^*$ sînt echivalente.

Cu privire la completatul în metrica probabilistă avem

Teorema 3.3.6. *Orice spațiu Șerstnev $(S, \mathcal{F}, \mu)$ în care μ este continuă relativ la șirurile nedescrescătoare și* $\sup\{\mu(F, F): F < H_0\} = H_0$, *are un completat care este unic abstracție făcînd de o izometrie.*

Consecință. Orice spațiu Menger $(S, \mathcal{F}, T)$ cu T continuă la stînga admite un completat unic abstracție făcînd de o izometrie.

Acest rezultat a fost obținut direct pentru spații Menger cu t-normă continuă în [257] iar pentru spații Menger nearhimediene în [109, teorema 2.2].

Cu privire la consistența completitudinii probabiliste cu cea a metricii obișnuite în cazul cînd $(S, \mathcal{F}, T)$ este metrizabil, cu T continuă la stînga sau $(S, \mathcal{F}, \mu)$ cu μ verificînd ipotezele teoremei 3.3.6 avem că uniformitatea $\mathcal{U}$ (definită în [234]) este metrizabilă printr-o metrică d a cărei uniformitate generată $\mathcal{U}_d$ este echivalentă cu $\mathcal{U}$.

Observație. O metodă constructivă, care nu pune accentul pe proprietățile t-normelor, a fost dată în [196] iar un răspuns mai complet la problema pusă este dat de

Teorema 3.3.7 [259] *Fie $(S, \mathcal{F}, \mu)$ un spațiu Șerstnev în care μ satisface ipotezele teoremei 3.3.6, atunci avem:*

1) *dacă $(S, \mathcal{F}, \mu)$ este complet atunci și uniformitatea $\mathcal{U}$ generată de $\mathcal{F}$ este completă,*

2) *dacă $(S, \mathcal{F}, \mu)$ este complet și d metrizează pe $(S, \mathcal{F}, \mu)$ atunci (S, d) este complet,*

3) *dacă $(S^*, \mathcal{F}^*, \mu)$ este completatul lui $(S, \mathcal{F}, \mu)$ $\mathcal{U}$ uniformitatea pe S generată de $\mathcal{F}$ și $\mathcal{U}^*$ uniformitatea pe S^* generată de $\mathcal{F}^*$ atunci $(S^*, \mathcal{U}^*)$ este completata structurii $(S, \mathcal{U})$.*

4) *dacă (S', d') este completatul lui (S, d) atunci există o metrică d^* pe S^* care metrizează pe $(S^*, \mathcal{F}^*)$ și (S', d') este izometric cu (S^*, d^*).*

3.3. PRODUSE DE STRUCTURI PROBABILISTE

Rezultate privind produse și spații cît de PM-spații sînt date în [115], [296], [68], [69], [280] și altele. Ne vom mărgini numai la cîteva dintre acestea în scopul fixării unor noțiuni ce vor fi folosite în restul capitolului.

Scanned with OKEN Scanner

Amintim că fiind date două PM-spații $(S_1, \mathcal{F}_1)$ și $(S_2, \mathcal{F}_2)$ iar T o t-normă continuă la stînga atunci prin *T-produsul* lor $(S_1, \mathcal{F}_1) \times (S_2, \mathcal{F}_2)$ se înțelege spațiul $(S_1 \times S_2, T(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2))$ unde $T(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ este aplicația definită pe $(S_1 \times S_2) \times (S_1 \times S_2)$ cu valori în $\mathcal{R}^+$ dată prin $T(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathcal{F}_1(p_1, q_1), \mathcal{F}_2(p_2, q_2))$ pentru orice $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ și $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ din $S_1 \times S_2$. Dacă $(S, \mathcal{F}_1)$ și $(S_2, \mathcal{F}_2)$ sînt spații semimetrice probabiliste, μ o funcție triunghiulară atunci *μ-produsul* lor $(S_1 \times S_2, \mathcal{F}_1 X_\mu \mathcal{F}_2)$ este definit dîndu-se $\mathcal{F}_1 X_\mu \mathcal{F}_2$ prin $\mathcal{F}_1 X_\mu \mathcal{F}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = F^{\mu}_{\mathbf{pq}} = \mu(F_{p_1q_1}, F_{p_2q_2})$. Dacă $\mu = \pi_T$ se obține T-produsul de mai sus.

Se demonstrează [69] că T-produsul a două PM-spații sau a două spații Menger (cu același T) este de același tip și analog în cazul μ-produsului [280].

În [69] se demonstrează o serie de rezultate privind condițiile relativ la care produsul PM-spațiilor echilaterale simple sau α-simple, să fie de același tip și echivalența (ε, λ)-topologiei spațiului produs cu produsul (ε,λ)-topologiilor.

Dacă PM-spațiile inițiale sînt nearhimediene Ψ_1 și respectiv Ψ_2-simplu generate de spațiile metrice nearhimediene (S_1, d_1) și (S_2, d_2) și de o aceeași funcție de repartiție G, atunci Min-produsul lor este Ψ-simplu generat de $(S, d = \max(d_1, d_2))$ și $\Psi = \max\{\Psi_1, \Psi_2\}$ [115].

O noțiune folosită în cele ce urmează este aceea de *diametru probabilist* al unei mulțimi $A \subseteq S$, unde $(S, \mathcal{F}, T)$ este un spațiu Menger cu t-norma continuă [69], ca fiind funcția D_A dată prin

$$D_A(x) = \sup_{t<x} \left(\inf_{p, q \in A} F_{pq}(t) \right)$$

iar în cazul spațiilor semimetrice probabiliste $D_A = \inf_{p, q \in A} F_{pq}$ [280].

Se demonstrează [69] că D_A are următoarele proprietăți:

1) $D_A \in \mathcal{R}^+$,

2) dacă $A \subseteq B$ atunci $D_A \geqslant D_B$,

3) $D_A = H_0$ dacă și numai dacă $A = \{p\}$, $p \in S$,

4) dacă $A, B \subseteq S$, $A, B \neq \varnothing$, $A \cap B \neq \varnothing$ atunci avem că $D_{A \cup B}(x + y) \geqslant T(D_A(x), D_B(y))$, sau respectiv $D_{A \cup B} \geqslant \mu(D_A, D_B)$ în $(S, \mathcal{F}, \mu)$ ([280]),

5) dacă $A \neq \varnothing$ atunci $D_A = D_{\bar{A}}$, unde $\bar{A}$ este închiderea mulțimii A în (ε, λ)-topologia lui S,

6) dacă $(S, \mathcal{F})$ este un spațiu semimetric probabilist, φ o funcție-profil și $A \subseteq S$, $A \neq \varnothing$, atunci avem că $D_A \geqslant D_{C_\varphi}(A)$ și dacă există o funcție triunghiulară μ, continuă, relativ la care $(S, \mathcal{F}, \mu)$ este spațiu Šerstnev atunci avem că $D_{C_\varphi}(A) \geqslant \mu(\mu(\varphi, \varphi), D_A)$.

Fiind dată $A \subseteq S$, $A \neq \varnothing$ se spune că A este *mărginită probabilist* dacă $\sup_x D_A(x) = 1$, *semimărginită probabilist* dacă $0 < \sup_x D_A(x) < 1$ iar dacă $D_A = 0$ se spune că A este *nemărginită probabilist*.

Dacă $A, B \subseteq S$, $A, B \neq \varnothing$, se numește *distanță probabilistă dintre A și B* sau *distanță Hausdorff probabilistă* funcția $F_{AB}(x) = \sup_{t<x} T\left(\inf_{p \in A} \left(\sup_{q \in B} F_{pq}(t), \inf_{q \in B} \left(\sup_{p \in A} F_{pq}(t) \right) \right) \right)$ unde T se consideră continuă iar în cazul spațiilor semimetrice probabiliste $(S, \mathcal{F})$ se introduce prin $F^{\mu}_{AB} = \mu(AB, BA)$, unde $AB(x) = \left(\inf_{p \in A} \sup_{q \in B} F_{pq} \right)(x)$ iar μ este o funcție triunghiulară arbitrară.

Scanned with OKEN Scanner

În [69], [280] se arată că avem

1) $F_{AA} = H_0$ și $F_{AB} = F_{BA}$ pentru orice $A, B \subseteq S$, $A, B \neq \emptyset$,

2) $F_{AB} = F_{\overline{A}\overline{B}}$ pentru orice $A, B \subseteq S$, $A, B \neq \emptyset$ iar în cazul spațiilor semimetrice probabiliste dacă este dată funcția-profil φ și $F^{u}_{AB}(\sup \varphi) H_0$ atunci avem că $A \subseteq C_\varphi(B)$ și $B \subseteq C_\varphi(A)$.

3) dacă $A, B \subseteq S$, $A, B \neq \emptyset$ avem că $F_{AB} = H_0$ dacă și numai dacă $\bar{A} = \bar{B}$ iar în cazul spațiilor Șerstnev cu μ continuă avem că $F^{u}_{AB} = H_0$ dacă și numai dacă $C_{H_0}(A) = C_{H_0}(B)$.

4) dacă $A, B \subseteq S$, $A, B \neq \emptyset$ atunci pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ avem că $F_{AB}(x+y) \geqslant T(F_{AC}(x), F_{BC}(y))$ ceea ce conduce la faptul că pe orice familie $\mathcal{A}$ de părți ale lui S se poate defini $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$ prin $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(A, B) = F_{AB}$ și dacă $\mathcal{A}$ este formată din mulțimi închise $(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}}, T)$ este un spațiu Menger. Un rezultat similar are loc și pentru spațiul Șerstnev [280, teorema 4.16] și în spații Menger nearhimediene [115].

3.4. MĂSURI ALEATOARE DE NECOMPACITATE

Ideea generalizării noțiunii de compacitate prin introducerea unei măsuri de necompacitate îi aparține lui Kuratowski [147] care asociază fiecărei mulțimi A dintr-un spațiu metric complet un număr $\alpha(A)$ care se anulează numai dacă A este relativ compactă. Aplicarea acestei noțiuni la probleme de topologia spațiilor metrice și la introducerea noțiunii de α-contracție care generalizează noțiunea de contracție și alte clase de aplicații pe spații Banach, împreună cu rezultate recente privind existența punctelor fixe pentru astfel de aplicații, fac ca această noțiune să fie de mare utilitate în analiza matematică. De aceea introducerea și studiul unei măsuri aleatoare de necompacitate [21], [52], [27] oferă noi căi de investigație și aplicații ale analizei probabiliste.

3.4.1. Măsura aleatoare de necompacitate a lui Kuratowski.

Definiția 3.3.3. Fie $(S, \mathcal{F})$ un PM-spațiu, $\mathcal{P}_1(S)$ mulțimea părților nevide ale lui S și $D_A(\cdot)$ diametrul probabilist al mulțimii $A \in \mathcal{P}_1(S)$. Aplicația $\alpha: \mathcal{P}_1(S) \to \mathcal{R}$ dată prin $\alpha(A) = \alpha_A(x) = \sup \{\varepsilon \geqslant 0: \exists \{A_j\}_{j \in J}, A \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j, J = \text{finită și } D_{A_j}(x) \geqslant \varepsilon, \text{ oricare ar fi } j \in J\}$, $A \in \mathcal{P}_1(S)$, se numește *măsura aleatoare de necompacitate a lui Kuratowski* sau *funcția lui Kuratowski*. Funcția $\alpha_A(\cdot)$ se numește funcția lui Kuratowski a mulțimii A.

Propoziția 3.3.1. *Funcția lui Kuratowski are următoarele proprietăți:*

1) $\alpha_A(\cdot) \in \mathcal{R}^+$ *iar dacă* A *este probabilistic mărginită avem* $\alpha_A \in \mathcal{R}^+_v$,

2) $\alpha_A(x) \geqslant D_A(x)$,

3) $A \subseteq B$ *implică* $\alpha_A(x) \geqslant \alpha_B(x)$,

4) $\alpha_{A \cup B}(x) = \min \{\alpha_A(x), \alpha_B(x)\}$,

5) *dacă* $A \subseteq S$ *și* $(S, \mathcal{F}, T)$ *este un spațiu Menger cu* T *continuă atunci* $\alpha_A(x) = \lambda_{\overline{A}}(x)$, *unde* A *este închiderea în* (ε, λ)*-topologia lui* S.

Demonstrație. 1) Fie $A \subseteq S$, atunci se știe că $D_A \in \mathcal{R}^+$ deci $D_A(0) = 0$ pentru orice $A \subseteq S$ și $\alpha_A(0) = 0$. Proprietatea de monotonie nedescrescătoare rezultă din proprietatea analoagă a funcțiilor D_{A_j}.

Să arătăm că α_A este continuă la stînga și pentru aceasta să notăm prin $K_{A,x} = \{\varepsilon > 0: \exists \{A_j\}_{j \in J}, A \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j, D_{A_j}(x) \geqslant \varepsilon, J = \text{finită}\}$. Fie $x_0 \in (0, \infty)$ și $\varepsilon \in K_{A, x_0}$ atunci din continuitatea la stînga a lui D_{A_j} rezultă că pentru fiecare $\eta > 0$ există $\delta_j > 0$ astfel încît să avem $D_{A_j}(x_0) - D_{A_j}(x) < \eta$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $0 < x_0 - x < \delta_j$. Fie $\delta = \min_{j \in J} \delta_j$ $\eta \leqslant \varepsilon$, atunci din $D_{A_j}(x) > D_{A_j}(x_0) - \eta \geqslant \varepsilon - \eta$ pentru $0 < x_0 - x < \delta$ rezultă că $\varepsilon - \eta \in K_{A, x}$ și $\varepsilon - \eta \leqslant \alpha_A(x)$. Cum ε a fost ales arbitrar în K_{A, x_0} rezultă că $\alpha_A(x_0) - \alpha_A(x) \leqslant \eta$ pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ceea ce este echivalent cu continuitatea la stînga a lui α_A în orice punct $x_0 > 0$ și deci $\alpha_A \in \mathcal{R}^+$.

Să presupunem că A este probabilist mărginită în $(S, \mathcal{F})$, atunci putem alege o partiție finită a lui A, $\{A_j\}_{j \in J}$ cu A_j probabilist mărginite și cum $D_{A_j} \in \mathcal{R}_v^+$, pentru orice $j \in J$, rezultă că $\lim_{x \to \infty} D_{A_j}(x) = 1$. Să observăm că pentru orice $\eta \in (0, 1)$ și $j \in J$ există $x_j \in \mathbf{R}$ astfel încît să avem că $D_{A_j}(x) \geqslant 1 - \eta$, $j \in J$. Fie $x = \max \{x_j : j \in J\}$, atunci $D_{A_j}(x) > 1 - \eta$ ceea ce implică $\lim_{x \to \infty} \alpha_A(x) = 1$ și proprietatea 1) este justificată.

2) Din faptul că $\{A\}$ este o acoperire a lui A rezultă că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și $\varepsilon \geqslant 0$ cu proprietatea că $D_A(x) \geqslant \varepsilon$ avem că $\varepsilon \in K_{A, x}$ și deci $\alpha_A(x) \geqslant D_A(x)$.

3) Rezultă imediat din faptul că $A \subseteq B$ implică $K_{B, x} \subseteq K_{A, x}$ pentru fiecare $x \in \mathbf{R}$.

4) Pentru justificarea acestei proprietăți este suficient să arătăm că $\min \{\alpha_A(x), \alpha_B(x)\} \leqslant \alpha_{A \cup B}(x)$ pentru că din 3) rezultă că $\alpha_A(x), \alpha_B(x) \geqslant \alpha_{A \cup B}(x)$. Să observăm că din definiția lui $\alpha_A(x)$ rezultă că pentru orice $\delta > 0$ există un $\varepsilon_\delta \in K_{A, x}$ și o acoperire finită $\{A_j^\delta\}_{j \in J}$ a lui A astfel încît să avem că $\alpha_A(x) - \delta \leqslant \varepsilon_\delta \leqslant D_{A_j^\delta}(x)$ și în mod analog există un $\eta_\delta \in K_{B, x}$ și o acoperire finită a lui B, $\{B_i^\delta\}_{i \in I}$ astfel încît să avem că $\alpha_B(x) - \delta \leqslant \eta_\delta \leqslant D_{B_i^\delta}(x)$. Dacă presupunem că $\alpha_A(x) \leqslant \alpha_B(x)$ atunci avem că $\alpha_A(x) - \delta \leqslant \alpha_B(x) - \delta \leqslant D_{B_i^\delta}(x)$ și dacă notăm prin $\{C_m\}_{m \in M}$, $M = I \cup J$, definită prin $C_m = A_j$ dacă $m \in J$ și $C_m = B_i$ dacă $m \in I$, deducem că $D_{C_m}(x) \geqslant \alpha_A(x) - \delta$. Prin urmare $\alpha_A(x) - \delta \in K_{A \cup B, x}$ adică $\alpha_A(x) \leqslant \alpha_{A \cup B}(x)$ și 4) este demonstrată.

5) Din 3) avem că $\alpha_A(x) \geqslant \alpha_{\bar{A}}(x)$ pentru că $A \subseteq \bar{A}$ iar pentru inegalitatea inversă observăm că pentru orice $\varepsilon \in K_{A, x}$ există o acoperire finită $\{A_j\}_{j \in J}$ a lui A astfelîncît $D_{A_j}(x) \geqslant \varepsilon$ pentru orice $j \in J$. Cum $\bar{A} \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$ și $\tilde{D}_{\bar{A}_j}(x) = D_{A_j}(x)$ (pentru că $(S, \mathcal{F}, T)$ este spațiu Menger cu T continuă) rezultă că $\varepsilon \in K_{\bar{A}, x}$ și deci $\alpha_A(x) \leqslant \alpha_{\bar{A}}(x)$ și propoziția este demonstrată.

O definiție echivalentă pentru funcția lui Kuratowski, care se folosește cu ușurință în spații Șerstnev, este dată de

Propoziția 3.3.2. *Fie $(S, \mathcal{F})$ un PM-spațiu, $\varnothing = A \subseteq S$ și K_A mulțimea funcțiilor $F \in \mathcal{R}^+$ cu proprietatea că există o acoperire finită $\{A_j\}_{j \in J}$ a lui A astfel încît $D_{A_j}(x) \geqslant F(x)$ pentru orice $x > 0$ și $j \in J$, atunci avem că $\alpha_A(x) = \sup_{F \in K_A} F(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.*

Demonstrație. Dacă $F \in K_A$ rezultă că $F(x) \in K_{A, x}$ pentru orice $x > 0$, deci $F(x) \leqslant \alpha_A(x)$ și $\sup_{F \in K_A} F(x) \leqslant \alpha_A(x)$ pentru orice $x > 0$. Pentru a arăta că $\alpha_A(x) \leqslant \sup_{F \in K_A} F(x)$ fie $\varepsilon > 0$ și $x > 0$, atunci din definiția lui $\alpha_A(x)$ rezultă că există $\varepsilon' \in K_{A, x}$ astfel încît să avem că $\alpha_A(x) - \varepsilon < \varepsilon'$. Din faptul că $\varepsilon' \in K_{A, x}$ rezultă că există o acoperire finită a lui A, $\{A_j\}_{j \in J}$, astfel încît să avem că $D_{A_j}(x) \geqslant \varepsilon'$ pentru orice $j \in J$ și să notăm prin $F_{x, \varepsilon'}(y) = \inf_{j \in J} D_{A_j}(y)$, $y \in \mathbf{R}$. Se verifică ușor că $F_{x, \varepsilon'} \in K_A$ și $F_{x, \varepsilon'}(y) \leqslant \sup_{F \in K_A} F(y)$. Cum $D_{A_j}(x) \geqslant \varepsilon'$, rezultă că $F_{x, \varepsilon'}(x) \geqslant \varepsilon'$ care la rîndul său implică relația $\alpha_A(x) - \varepsilon < \varepsilon' \leqslant$

Scanned with OKEN Scanner

$\leqslant F_{x,\varepsilon}(x) \leqslant \sup_{F\in K_A} F(x)$ și cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar deducem că $\alpha_A(x) \leqslant$ $\leqslant \sup_{F\in K_A} F(x)$.

Definiția 3.3.4. O parte $A \subseteq (S, \mathcal{F})$ se numește *precompactă probabilistic* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $1 > \lambda > 0$ există o acoperire finită a lui A cu un sistem de părți $\{A_j\}_{j\in J}$, $J =$ finită, cu proprietatea că $D_{A_j}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ pentru orice $j \in J$.

O parte finită $B \subseteq S$ se numește (ε, λ) — *rețea finită* a lui A dacă pentru orice $p \in A$ există $q(p) \in B$ astfel încît să avem că $F_{pq(p)}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ și vom nota pe B prin $B^{rf}_{\varepsilon,\lambda}(A)$.

Propoziția 3.3.3. *Dacă A este probabilistic precompactă atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, $1 > \lambda > 0$ există o (ε, λ)-rețea finită $B^{rf}_{\varepsilon,\lambda}(A)$.*

În cazul unei clase largi de spații Menger avem o caracterizare a precompacității cu ajutorul (ε, λ)-rețelelor prin

Teorema 3.3.8. *Fie $(S, \mathcal{F}, T)$ un spațiu Menger în care T are proprietatea că $\sup_{x<1} T(x, x) = 1$. Condiția necesară și suficientă pentru ca o mulțime $A \subseteq S$ să fie probabilistic precompactă este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ și $1 > \lambda > 0$ să existe o (ε, λ)-rețea finită pentru A.*

Demonstrație. Întrucît necesitatea rezultă din propoziția 3.3.3 să ne ocupăm de suficiență considerînd $\varepsilon > 0$ și $1 > \lambda < 0$ arbitrar dar fixați și $0(\varepsilon, \lambda)$-rețea finită a lui A, $B^{rf}_{\varepsilon,\lambda'}(A) = \{p_i\}_{i\in I}$, $I =$ finită, în care $\varepsilon' = \varepsilon/2$ și $\lambda' > 0$ astfel ales încît $T(1-\lambda', 1-\lambda') > 1 - \lambda$. Vom avea că $A \subseteq \bigcup_{i\in I} S_{p_i}(\varepsilon', \lambda')$ unde $S_{p_i}(\varepsilon', \lambda') = \{q \in S: F_{p_iq}(\varepsilon') > 1 - \lambda'\}$. Cum pentru orice $r, q \in S_{p_i}(\varepsilon', \lambda')$ avem că $F_{pr}(\varepsilon) \geqslant T(F_{rp_i}(\varepsilon/2), F_{p_iq}(\varepsilon/2)) \geqslant T(1-\lambda'), 1-'\lambda) > 1-\lambda$ obținem că $D_{Sp_i}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ pentru orice $i \in I$ și deci A este probabilistic precompactă.

Teorema 3.3.9. *O mulțime $A \subseteq S$, $A \neq \varnothing$ într-un spațiu Menger $(S, \mathcal{F}, T)$ cu proprietatea că $\sup_{x<1} T(x, x) = 1$ este probabilistic precompactă dacă și numai dacă ea este precompactă relativ la (ε, λ)-uniformitatea indusă de $\mathcal{F}$.*

Demonstrație. Se verifică ușor că $A \subseteq S$ este precompactă relativ la (ε, λ)-uniformitatea indusă de $\mathcal{F}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $1 > \lambda > 0$ există o mulțime finită $B_{\varepsilon,\lambda} = \{p_i\}_{i\in I}$, I finită, astfel încît $A \subseteq \bigcup_{i\in I} S_{p_i}(\varepsilon, \lambda)$. Fie $\varepsilon > 0$ și $1 > \lambda > 0$ date iar $\lambda' > 0$, $\eta > 0$ aleși astfel încît $T(1-\eta, 1-\eta) > 1-\lambda' > 1-\lambda$ a căror existență este asigurată de ipotezele asupra lui T.

Dacă A este precompactă relativ la (ε, λ)-uniformitatea indusă de $\mathcal{F}$, atunci rezultă că există $\{p_1, \ldots, p_n\}$ astfel că $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_{p_i}(\varepsilon/4, \eta)$ și se arată că $D_{Sp_i}(\varepsilon) \geqslant 1 - \lambda'$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ adică A este probabilistic precompactă.

Reciproc, din precompacitatea probabilistică a lui A și din teorema 3.3.8 rezultă existența unei (ε, λ)-rețele finite $\{p_1, \ldots, p_n\}$ și deci relația $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_{p_i}(\varepsilon, \lambda)$ care este echivalentă cu precompacitatea lui A relativ la (ε, λ)-uniformitatea indusă de $\mathcal{F}$.

O caracterizare a mulțimilor probabilistic precompacte este dată de

Teorema 3.3.10. *O parte nevidă $A \subseteq (S, \mathcal{F})$ este probabilistic precompactă dacă și numai dacă $\alpha_A = H_0$.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Dacă A are proprietatea că $\alpha_A = H_0$ și $\varepsilon, \lambda > 0$ sînt fixate, avem că $\alpha_A(\varepsilon) = 1$ și deci se poate determina un $\varepsilon_\lambda \in K_{A,\varepsilon}$ cu proprietatea că $\lambda_A(\varepsilon) - \lambda < \varepsilon_\lambda$ și $1 - \lambda < \varepsilon_\lambda$. Cum $\varepsilon_\lambda \in K_{A,\varepsilon}$ implică existența unei acoperiri finite $\{A_i\}_{i \in I}$, pentru A cu $D_{A_i}(\varepsilon) > \varepsilon_\lambda > 1 - \lambda$, $i \in I$ și deci A este probabilistic precompactă.

Reciproc, dacă presupunem că A este probabilistic precompactă și alegem un $x > 0$ atunci dacă luăm $\varepsilon = x$, $\eta \in (0, 1)$ și $\lambda = 1 - \eta$ rezultă că există o acoperire finită $\{A_i\}_{i \in I}$, pentru A, astfel încît $D_{A_i}(\varepsilon) > 1 - \lambda = 1 - (1 - \eta) = \eta$ și deci $\eta \in K_{A,x}$ iar $\alpha(x) \geqslant \eta$. Cum η a fost ales arbitrar din $(0, 1)$ rezultă că $\alpha_A(x) = 1$ iar din faptul că x este arbitrar, $x > 0$, obținem $\alpha_A = H_0$.

Propoziția 3.3.4. *Fiind date spațiile Menger* $(S_i, \mathcal{F}_i, T)$, $i = 1, 2$ *cu* T *continuă și* α^1, α^2, α *măsuri aleatoare de necompacitate ale lui Kuratowski respectiv în* $(S_i, \mathcal{F}_i, T)$, $i = 1, 2$ *și* $(S_1 \times S_2, \mathcal{F}_T, T)$ *vom avea că* $\alpha_A(x) = T(\alpha^1_{A_1}(x), \alpha^2_{A_2}(x))$ *pentru* $A = A_1 \times A_2 \subseteq S_1 \times S_2$, $x \in \mathbf{R}$.

În ceea ce privește legătura dintre numărul lui Kuratowski al unei mulțimi A dintr-un spațiu metric (S, d) ($\alpha(A) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, $I =$ finită și diam $(A_i) < \varepsilon\}$) și funcția lui Kuratowski din spațiul metric probabilist generat de $(S, \mathcal{F}_g)(\mathcal{F}_g(p, q) = F_{pq}(x) = H_0(x - d)(p, q))$, $x \in \mathbf{R}$) vom avea

Propoziția 3.3.5. *Pentru orice mulțime mărginită* $A \subseteq (S, d)$ *avem că* $\alpha_A(x) = H_0(x - \alpha(A))$, $x \in \mathbf{R}$.

Observație. Rezultă că o mulțime $A \subseteq (S, d)$ este precompactă dacă și numai dacă este probabilistic precompactă în $(S, \mathcal{F}_g)$ și se pot da reguli de calcul [27] pentru α_A cu ajutorul lui $\alpha(A)$.

În [27] se dă o generalizare a teoremelor de tip Cantor privind convergența șirurilor de mulțimi care se folosește în teoria punctelor fixe pentru aplicații pe PM-spații.

3.4.2. Măsuri aleatoare de necompacitate de tip Hausdorff.

Vom conveni să notăm pentru orice $A, B \subseteq (S, \mathcal{F})$ prin F^T_{AB} funcția $F_{AB}(x) = \sup_{t<x} T(\inf_{p \in A} (\sup_{q \in B} F_{pq}(t)), \inf_{q \in B} (\sup_{p \in A} F_{pq}(t)))$.

Definiția 3.3.5. Se numește *măsură aleatoare de necompacitate a lui Hausdorff* sau *funcția lui Hausdorff* funcția $\chi_A : \mathcal{P}_1(S) \to \mathcal{R}^+$ ($\mathcal{P}_1(S) = \mathcal{P}(S) - \{\varnothing\}$) dată prin $\chi^0_A(x) = \sup \{\varepsilon \geqslant 0 : \exists A_\varepsilon \subseteq S$, $A_\varepsilon =$ finită, $F^{\mathrm{Min}}_{AA}(x) \geqslant \varepsilon\}$ numită și Min-măsura aleatoare de necompacitate a lui Hausdorff sau $\chi^1_A(x) = \sup$ (sup $\{\varepsilon \geqslant 0 : \exists B^{rf}_{t,\varepsilon} = (\varepsilon, t)$-rețea finită pentru $A\}$.

Dacă T este o t-normă continuă funcția $\chi^T_A(x) = \sup \{F^T_{AB}(x) : B \subseteq S$, $B =$ finită$\}$, se numește T-măsura aleatoare de necompacitate a lui Hausdorff.

Teorema 3.3.11. *În orice PM-spațiu avem că* $\chi^0_A = \chi^1_A$ *pentru orice* $A \in \mathcal{P}_1(S)$.

Demonstrație. Fie $\chi^1_A(x) = 0$, atunci rezultă că $K^1_{A,t} = \{\varepsilon \geqslant 0 : \exists B^{rf}_{t,\varepsilon} f(A)\} = \{0\}$ pentru orice $t < x$. Fie A_ε o mulțime finită arbitrară și $t < x$ fixat, atunci rezultă că există $p_0 \in A$ astfel încît $\sup_{q \in A_\varepsilon} F_{p_0 q}(t) = 0$ și deci $\sup_{t<x} \inf_{p \in A} \sup_{q \in A_\varepsilon} F_{pq}(t) = 0$ căci dacă pentru orice $p \in A$ am avea $\sup_{q \in A_\varepsilon} F_{pq}(t) > \varepsilon > 0$ atunci $\varepsilon \in K^1_{A,t}$ ceea ce este o absurditate. Rezultă astfel că $F_{AA_\varepsilon}(x) = 0$ și cum A_ε a fost arbitrară rezultă că $\chi^0_A(x) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\chi^1_A(x) > 0$ și $0 < \varepsilon \chi^1_A(x)$. Atunci există $t_\varepsilon < x$ astfel încît $\varepsilon < \sup K^1_{A,t}$ deci există $B^{rf}_{t_\varepsilon,\varepsilon}(A) = B$ care poate fi considerată minimală în sensul că în $B = B^{rf}_{t_\varepsilon,\varepsilon}(A)$ nu există q cu proprietatea că $F_{pq}(t_\varepsilon) < \varepsilon$ pentru orice $p \in A$. În acest caz pentru orice $p \in A$, există $q \in B$ astfel încît $F_{pq}(t_\varepsilon) \geqslant \varepsilon$ deci $\sup_{q \in B} F_{pq}(t_\varepsilon) \geqslant \varepsilon$ și deci $\sup_{t<x} \inf_{p \in A} \sup_{q \in B} F_{pq}(t) \geqslant \varepsilon$. Folosind minimalitatea lui B se arată în mod asemănător că $\sup_{t<x} \inf_{q \in B} \sup_{p \in A} F_{pq}(t) \geqslant \varepsilon$ și deci $F_{AB}(x) \geqslant \varepsilon$ adică $\varepsilon \leqslant \chi^0_A(x)$ și $\chi^1_A(x) \leqslant \chi^0_A(x)$.

Inegalitatea inversă rezultă din observația că pentru orice $\varepsilon < \chi^0_A(x)$ există $B =$ finită cu $F_{AB}(x) \geqslant \varepsilon > \varepsilon'$ pentru orice $\varepsilon' < \varepsilon$ ceea ce implică existența unui $t_{\varepsilon'} < x$ cu proprietatea că $\operatorname{Min}\{\inf_{p \in A} \sup_{q \in B} F_{pq}(t_{\varepsilon'}), \inf_{q \in B} \sup_{p \in A} F_{pq}(t_{\varepsilon'})\} > \varepsilon'$ de unde deducem că $\inf_{p \in A} \sup_{q \in B} F_{pq}(x) > \varepsilon'$ pentru orice $\varepsilon' < \varepsilon$ și deci $B = B^{rf}_{x,\varepsilon}(A)$ adică $\varepsilon \leqslant \sup K^1_{A,x} = \chi'_A(x)$. Se arată că $\chi^1_A(x) = \chi'_A(x-0)$ și atunci cum am dedus că $\chi^0_A(x) \leqslant \chi^1_A(x)$ și $\chi^0_A(x) \in \mathcal{R}^+$ trecînd la limită laterală la stînga în raport cu x se obține $\chi^0_A(x) \leqslant \chi^1_A(x)$.

În cazul $\chi^0_A(x) = 0$ dacă presupunem că $\chi^1_A(x) > 0$ obținem cu raționamentul din prima parte că $\chi^0_A(x) > 0$ ceea ce este absurd și propoziția este complet demonstrată.

Propoziția 3.3.6. [27] *Fie $(S, \mathcal{F})$ un PM-spațiu și T o t-normă continuă, atunci pentru orice $\varnothing \neq A \subseteq S$ avem $\chi^T_A(x) = T(\chi^1_A(x), \chi^1_A(x))$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.*

Justificarea definiției 3.3.5 rezultă din următoarele propoziții.

Propoziția 3.3.7. *Fie $(S, \mathcal{F}, T)$ un spațiu Menger cu T continuă, atunci o mulțime nevidă $A \subseteq S$ este probabilistic precompactă dacă și numai dacă $\chi^1_A = \chi^T_A = H_0$. În general această caracterizare are loc și prin $\chi^{T'}_A = H_0$ pentru orice altă t-normă continuă T'.*

Propoziția 3.3.8. *Fie (S, d) un spațiu metric și $(S, \mathcal{F}_d)$ PM-spațiul generat. Atunci pentru orice mulțime A mărginită în (S, d) avem $\chi^1_A(x) = H_0(x - \chi(A))$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ unde $\chi(A)$ este numărul lui Hausdorff asociat lui A.*

Acest rezultat se poate folosi [27] la a arăta că măsura aleatoare în sensul lui Kuratowski diferă de cele în sensul lui Hausdorff iar o legătură între ele este dată de

Teorema 3.3.12. *Fie $(S, \mathcal{F}, T)$ un spațiu Menger cu T continuă, atunci avem că*

$$\chi^1_A(x) \geqslant \alpha_A(x) \geqslant \chi^T_A(x/2), \qquad x \in \mathbf{R}$$

Cu privire la proprietățile măsurilor aleatoare de necompacitate în sensul lui Hausdorff, vom avea

Teorema 3.3.13. *Fie $(S, \mathcal{F})$ un PM-spațiu, atunci vom avea*

1) *$\chi^1_A \in \mathcal{R}^+$ și dacă A este probabilistic mărginită avem că $\chi^1_A \in \mathcal{R}^+_v$,*

2) *$\chi^1_A(x) \geqslant D_A(x)$ și respectiv $\chi^T_A(x) \geqslant T(D_A(x), D_A(x))$,*

3) *$A \subseteq B$ implică $\chi^1_A(x) \geqslant \chi^1_B(x)$ și respectiv $\chi^T_A(x) \geqslant \chi^T_B(x)$,*

4) *$\chi^1_{A \cup B}(x) = \min\{\chi^1_A(x), \chi^1_B(x)\}$ și respectiv $\chi^T_{A \cup \{p\}} = \chi^T_A(x)$ pentru orice $p \in S$,*

5) *dacă $(S, \mathcal{F}, T)$ este un spațiu Menger cu T continuă și A este închiderea lui A în (ε, λ)-topologia definită de $\mathcal{F}$ atunci $\chi^1_A(x) = \chi^1_{\bar{A}}(x)$ și respectiv $\chi^T_A(x) = \chi^T_{\bar{A}}(x)$.*

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. ELEMENTE DE ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ PROBABILISTĂ

Teoria structurilor metrice probabiliste a fost îmbogățită și în direcția aplicațiilor ei la mulțimi cu o structură algebrică de spațiu liniar. Teoria spațiilor liniare normate probabiliste inițiată și dezvoltată de A. N. Šerstnev [268], [269], 270] D. K. Mushtari și M. S. Matveichuk [191], [163], B. J. Prochaska [213] și alții, deschide perspective în această direcție sau în teoria structurilor liniare topologice local convexe probabiliste, a structurilor cu produs interior probabilist [255] sau a inelelor normate probabiliste. În special teoria probabilistă a operatorilor, componentă a analizei probabiliste în care A. T. Bharucha-Reid în [13], [14] obține rezultate remarcabile, oferă noi direcții de cercetare.

4.1. CONSIDERAȚII PRIVIND SPAȚIILE NORMATE PROBABILISTE

4.1.1. Noțiunea de spațiu normat probabilist, consistența ei și exemple. Fie $\mathcal{G} = \{G, G = 1-F, F \in \mathcal{R}_+^+\}$, $B \subseteq \mathcal{G}$, $H^0 = 1 - H_0 \in B$ și $\mu: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Se definește mulțimea $B[\mu] = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n[\mu]$, unde $B_0[\mu] = B$, $B_n[\mu] = B_{n-1}[\mu] \cup \mu(B_{n-1}[\mu] \times B_{n-1}[\mu])$ și dacă μ este o funcție triunghiulară pe $B[\mu]$ care satisface condiția

(I) $\mu(U, V; x) \leqslant \inf_{t \in [0,1]} \min \{U(tx) + V(1-t)x), 1\} = \mu_1(U, V; x)$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ și $U, V \in B[\mu]$, atunci ea se numește *B-funcție.*

Definiția 3.4.1. Se numește *spațiu normat probabilist (SNP-spațiu)* orice triplet (L, f, μ) unde L este un spațiu liniar peste corpul numerelor reale sau complexe, f este o aplicație definită pe L și cu valori în $\mathcal{G}$ iar μ o $f(L)$-funcție care satisface axiomele:

1) $f(X) = ||X;.|| = H^0$ (adică $||X; x|| = H^0(x)$) dacă și numai dacă $X = \theta$, unde θ este vectorul nul din L,

2) $||cX; x|| = ||X; x/|c|||$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și c un scalar arbitrar, nenul,

3) $||X + Y; x|| \leqslant \mu(||X;.||, ||Y;.||; x)$ pentru orice $X, Y \in L$.

Uneori în loc de B-funcții se folosește noțiunea de *funcție triunghiulară relativ la* $B \subseteq \mathcal{G}$, ea fiind orice lege de compoziție μ pe B ce are pe H^0 element neutru, pentru orice $U \in B$ aplicația $\mu(., U): B \to B$ este crescătoare relativ la relația de ordine indusă pe B și μ verificînd condiția (I). În esență aceste două noțiuni coincid [272].

Spațiile normate obișnuite $(L, ||\cdot||)$ se scufundă în mod natural în clasa *SNP*-spațiilor căci dacă punem $||X; x|| = 1$ dacă $x \leqslant ||X||$ și zero în rest, pentru orice $X \in L$, aceasta verifică condițiile din definiție. Să considerăm

(II) $\mu_0(U, V; x) = \inf_{t \in [0,1]} \max \{U(tx), V((1-t)x)\}$, oricare ar fi $U, V \in \mathcal{G}$ care evident este o $f(L)$-funcție, și să observăm că $\mu_0(||X;.||, ||Y;.||; x) = 1$ dacă $x \leqslant ||X|| + ||Y||$ și zero în rest, iar din relația $||X + Y|| \leqslant ||X|| + ||Y||$ deducem că $||X + Y; x|| \leqslant \mu_0(||X;.||, ||Y;.||; x)$ adică $(L, ||.;.||, \mu_0)$ este un spațiu normat aleator.

Desigur că există și alte scufundări cum ar fi

Exemplul 1. Fie $L = \mathbf{R}^n$ și $||X|| = (\sum_{i=1}^{n} u_i^2)^{1/2}$ pentru $X = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$. Dacă definim pentru $X \neq \theta$, $||X; x|| = 1$ dacă $x \leqslant 0$, $||X; x|| = \exp(-x/||X||)$ dacă $x > 0$ iar pentru $X = \theta$ luăm $||\theta; x|| = H^0(x)$, obținem că $(L, ||;.||, \mu)$ este un *SNP*-spațiu pentru orice $f(L)$-funcție μ, $\mu \geqslant \mu_0$.

Exemplul 2. Fie $(L, \|\cdot\|)$ un spațiu liniar normat și fie $f = \|\cdot;\cdot\|$ definită prin

$$\|X; x\| = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leqslant 0, \\ 1/2, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 2\|X\|, \\ 0, & \text{dacă } x > 2\|X\|, \end{cases}$$

atunci $(L, \|\cdot;\cdot\|, \mu_0)$ este un SNP-spațiu.

Un rezultat fundamental, care asigură consistența noțiunii de spațiu normat probabilist, este dat de

Teorema 3.4.1. [272] *Fie* (Φ, q) *un spațiu numărabil normat unde* $q = \{\|\cdot\|_n\}_{1 \leqslant n \leqslant \infty}$ *este familia de seminorme corespunzătoare definite pe* Φ. *Atunci există o normă probabilistă* $f(.)$ *astfel încît* (Φ, f_τ, μ_0) *este un spațiu normat probabilist.*

Un exemplu concludent privind teorema de mai sus îl oferă clasa funcțiilor continue pe $[0, \infty)$, notată prin $C([0, \infty))$, în care sistemul de seminorme poate fi dat prin $\|X\|_n = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant n} |X(t)|$, $n = 1, \ldots,$. Se poate considera chiar că n ia orice valori reale și cum variabila aleatoare τ (o variabilă aleatoare arbitrară cu valori întregi nenegative și cu proprietatea că $P(\{\omega : \tau(\omega) \geqslant n\} > 0$ oricare ar fi n) are o repartiție continuă pe $[0, \infty)$, norma probabilistă poate fi $\|X; x\| = P \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \tau} |X(t)| \geqslant x)$ și are următoarea interpretare: dacă se presupune că $X(t)$ reprezintă o realizare a unui proces aleator a cărui desfășurare încetează la un moment aleator τ, care poate fi oricît de mare, atunci $\|X; x\|$ reprezintă probabilitatea ca procesul ce are realizarea $X(t)$ pînă la momentul încetării, să ia valori mai mari sau egale ca x.

Am văzut că în teoria structurilor metrice probabiliste au apărut unele probleme ce nu-și au analog în teoria obișnuită a structurilor metrice. Între aceste probleme amintim pe cea pusă și rezolvată de E. Thorp în [282] cu privire la cea mai bună inegalitate a triunghiului și dezvoltată în cazul spațiilor Šerstnev în [269], [273]. Această problemă își are corespondent și în teoria spațiilor normate probabiliste unde postularea compatibilității normei probabiliste cu structura de spațiu liniar cere o tratare aparte pe care o întîlnim în [188].

În adevăr, notînd cu $m(L, f)$ mulțimea funcțiilor triunghiulare pentru care (L, f) este SNP-spațiu, se poate introduce o relație de ordine pe mulțimea acestora. Vom considera că două asemenea funcții triunghiulare μ și μ' relative la E și respectiv E', care conțin pe $f(L)$, sînt egale dacă mulțimile generate de $f(L)$ și aceste două legi de compoziție precum și legile de compoziție induse pe aceste mulțimi de μ și μ' coincid.

Vom spune că μ este *mai bună* decît μ' și scriem $\mu \subseteq \mu'$, dacă $\mathbf{M}\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} U_i = \mu(U_1, \mu(U_2, \ldots, \mu(U_{n-1}, U_n) \ldots) \leqslant M'\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} U_i = \mu'(U_1, \mu'(U_2, \ldots, \mu'(U_{n-1}, U_n) \ldots)$ pentru orice $U_1, \ldots, U_n \in f(L)$.

Fie $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$ și $a \in \mathbf{R}^+$, să definim $a \circ U(x) = U(x/a)$ pentru $a > 0$ și $0 \circ U = H^0$. O submulțime $E \subseteq \mathcal{Q}$ se numește R^+-*stabilă* dacă $a \circ U \in E$ pentru orice $a \in \mathbf{R}^+$ și $U \in E$.

Teorema 3.4.2. *Dacă* μ *este o funcție triunghiulară, atunci în general nu există un spațiu normat probabilist netrivial* (L, f) *astfel ca* μ *să fie element minimal pentru* $m(L, f)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a găsi condiții suficiente pentru existența unei soluții la problema de mai sus se introduce noțiunea de funcție triunghiulară ν relativ la o mulțime $\mathbf{R}^+$-stabilă E *distributivă la* dreapta ca fiind aceea care satisface condiția

$$a \circ \nu\,(U, V) = \nu(a \circ U, a \circ V) \text{ oricare ar fi } U, V \in E \text{ și } a \geqslant 0.$$

Se verifică ușor că orice funcție triunghiulară μ definită cu ajutorul unei t-norme T prin $\mu(U, V; x) = \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} T[U(tX), V((1-t)x)] = \mu_T$, $U, V \in \mathcal{G}$ este distributivă la dreapta.

Teorema 3.4.3. *Fie μ o funcție triunghiulară relativ la $E \subseteq \mathcal{G}$, distributivă la dreapta, $(a+b) \circ U \leqslant \mu(a \circ U, b \circ U)$, $a, b \geqslant 0$, $\forall U \in E' \subseteq E$, $E' \neq \{H^0\}$ și R^+-stabilă. Dacă $\mu(U, V) \leqslant \mu(U, V)$ pe $E \times E$, atunci există un spațiu normat probabilist netrivial (L, f) astfel încît μ este un element minimal pentru $m(L, f)$.*

Prin urmare pentru orice t-normă T cu proprietatea $T \leqslant T_m$ există un spațiu normat probabilist (L, f) pentru care funcția triunghiulară μ_T (definită mai sus) este element minimal pentru $m(L, f)$.

Aspecte legate de SNP-spații produs sau cît au fost studiate în [221] iar cu privire la consistența SNP-spațiilor se consideră un spațiu vectorial L și aplicațiile $s: L \to [0, \infty)$, $f: L \to \mathcal{R}^+$ unde

$$f(X; x) = \begin{cases} H_0(x), \text{ dacă } x \leqslant 0 \text{ sau } X = \theta, \\ \min\left\{\dfrac{x}{s(X)}, 1\right\}, \text{ în rest} \end{cases}$$

(făcînd convenția că $x/0 > 1$). Se arată că (L, s) este un spațiu normat dacă și numai dacă (L, f, Min) este un spațiu normat aleator, că topologiile generate de s și f (în sensul din § 4.1.2) sînt identice și că există spații normate aleatoare cu t-norme mai slabe decît Min a căror (ε, λ)-topologie este local convexă, deci noțiunea de spațiu normat aleator este o extensie proprie a celei de spațiu normat.

4.1.2. *Topologia naturală, convergența șirurilor, metrizabilitatea și normabilitatea SNP-spațiilor.* Considerentele de natură topologică asupra SNP-spațiilor, abordate și rezolvate în mod esențial de A. N. Šerstnev, au avut la bază utilizarea normei probabiliste într-o manieră similară cu cea din [233].

Teorema 3.4.4. *Orice SNP-spațiu (L, f, μ) este un spațiu liniar topologic separat (de tip Hausdorff) în care $\mathcal{S} = \{S(\varepsilon, \lambda)\}$, $\lambda > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $S(\varepsilon, \lambda) = \{X \in L: \|X; \lambda\| < \varepsilon\}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale originii.*

Propoziția 3.4.1. *Orice SNP-spațiu (L, f, μ) înzestrat cu (ε, λ)-topologia definită mai sus satisface prima axiomă de numărabilitate (adică fiecare punct posedă o bază numărabilă de vecinătăți).*

În adevăr, familia $\mathcal{S}' = \{S(1/n, 1/n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ este o bază numărabilă de vecinătăți ale originii și cum topologia este determinată prin translatarea bazei originii, rezultă că fiecare punct $X \in L$ posedă o bază numărabilă de vecinătăți.

Ținînd seama că orice SNP-spațiu este un spațiu liniar topologic de tip Hausdorff și posedă o bază numărabilă de vecinătăți ale originii, rezultă că topologia în SNP-spații este descrisă cu ajutorul convergenței șirurilor numărabile. Mai mult, $X_n \to X \in L$, dacă $n \to \infty$, dacă și numai dacă $\|X_n - X; x\| \to 0$ pentru orice $x > 0$, $n \to \infty$. De asemenea continuitatea opera-

Scanned with OKEN Scanner

țiilor de adunare și de înmulțire cu scalari revine la afirmațiile $X_n \to X$ și $Y_n \to Y$ implică $X_n + Y_n \to X + Y$ pentru $n \to \infty$ iar $a_n \to a$, a_n, a fiind scalari și $X_n \to X$ implică $a_n X_n \to aX$ pentru $n \to \infty$.

Un rezultat fundamental este dat de

Teorema 3.4.5. *Orice SNP-spațiu este metrizabil cu o metrică invariantă la translații.*

Pentru exemplificare se poate alege

$$d(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \left\| X - Y;\ \frac{1}{n} \right\| \cdot \left(1 + \left\| X - Y;\ \frac{1}{n} \right\|\right)^{-1}$$

și se verifică ușor că $d(X, Y)$ este o metrică invariantă la translații (adică $d(X, Y) = d(X-Y, \theta)$), $X_n \to \theta$ implică $d(X_n, \theta) \to 0$ și topologia dată de metrică este echivalentă cu topologia inițială.

Despre scufundarea inversă amintim următoarele rezultate [191]:

Propoziția 3.4.2. *Fie L un spațiu metric liniar adică un spațiu liniar topologic metrizabil în care topologia este dată de o distanță $|\cdot|$ invariantă la translații pentru care putem presupune că $|aX| \leqslant |X|$ pentru orice $|a| \leqslant 1$. În acest caz norma probabilistă*

$$(1) \qquad ||X; x|| = \min\left\{\left|\frac{X}{x}\right|, 1\right\}, \text{ pentru orice } x > 0,$$

satisface inegalitatea triunghiului în raport cu funcția triunghiulară μ_1 și generează o topologie echivalentă cu cea dată de metrica inițială.

Demonstrație. Vom avea că $||X + Y;\ x|| = \min\left\{\left|\frac{X+Y}{x}\right|, 1\right\} \leqslant$

$$\leqslant \inf_{t\in[0,1]} \min\left\{\left|\frac{X}{tx}\right| + \left|\frac{Y}{(1-t)x}\right|, 1\right\} = \inf_{t\in[0,1]} \min\{||X; tx|| + ||Y; (1-t)x||, 1\} =$$
$$= \mu_1(||X; .||, ||Y; .||; x).$$

Pe de altă parte să observăm că $||X;\ 1|| \leqslant \varepsilon$ implică $|X| \leqslant \varepsilon$ adică $S(\varepsilon, 1) \subseteq S(\varepsilon)$. De asemenea se știe [31] că pentru fiecare a avem $|aX|$ converge la zero simultan cu $|X|$ și deci pentru orice $\varepsilon > 0$ și λ fixat există ε_1 astfel încît din $|X| \leqslant \varepsilon_1$ să rezulte $|X/\lambda| \leqslant \varepsilon$ adică $S(\varepsilon_1) \subseteq \lambda S(\varepsilon)$ și $S(\varepsilon_1) \subseteq S(\varepsilon, \lambda)$ ceea ce justifică echivalența topologiilor.

În cazul spațiilor local convexe metrizabile inegalitatea triunghiului pentru norma probabilistă poate fi îmbunătățită în sensul că avem

Propoziția 3.4.3. *Dacă orice ε-vecinătate a unui spațiu metric liniar de tipul celui din propoziția anterioară este convexă, atunci avem că (L, f, μ_0) este un SNP-spațiu topologic echivalent cu $(L, |\cdot|)$, f fiind definită de (1) și μ_0 definită de (II).*

Demonstrație. Vom avea că

$$||X+Y; x|| = \min\left\{\left|\frac{X+Y}{x}\right|, 1\right\} \leqslant \inf_{t\in[0,1]} \min\left\{\left|\frac{tX}{tx} + \frac{(1-t)Y}{(1-t(x)}\right|, 1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{t\in[0,1]} \min\left\{\max\left[\left|\frac{X}{tx}\right|, \left|\frac{Y}{(1-t)x}\right|\right], 1\right\} = \inf_{t\in[0,1]} \max\{\|X; tx\|\}, \|Y; (1-t)x\|\} =$$
$$= \mu_0(\|X; .\|, \|Y; .\|; x)$$

ceea ce justifică afirmația făcută.

Scanned with OKEN Scanner

O ușoară modificare a relației de definiție (1) a normei probabiliste ne sugerează noi asemenea norme probabiliste și anume

$$||X; x|| = \inf \{\varepsilon_n : |X/x| \leqslant \varepsilon_n\},\ x > 0,\ 0 < \varepsilon_n \leqslant 1,\ \varepsilon_n \downarrow 0$$

unde în cazul cînd toate ε_n-vecinătățile originii sînt convexe se obține un *SNP*-spațiu echivalent de tipul (L, f, μ_0).

Să observăm că scufundarea naturală a spațiilor normate în SNP-spații, definită în § 4.1.1, conduce la identitatea (ε, λ)-topologiei cu topologia normei căci avem $V(\varepsilon, \lambda) = \{X \in L:\ ||X; \lambda|| < \varepsilon\} = \{X \in L:\ ||X|| < \lambda\}$.

Această proprietate se extinde la orice *SNP*-spațiu finit dimensional, înțelegînd prin dimensiunea sa, dimensiunea algebrică a spațiului liniar L. În adevăr avem

Propoziția 3.4.4. *Fie (L, σ) un spațiu liniar topologic, de tip Hausdorff și finit dimensional. Dacă există f și μ astfel încît (L, f, μ) să fie un SNP-spațiu, atunci (L, σ) și (L, f, μ) sînt liniar homeomorfe.*

Acesta este un rezultat bine cunoscut al analizei funcționale.

În ceea ce privește spațiile numărabil normate și *SNP*-spațiile asociate lor considerate în teorema 3.4.1, vom avea

Teorema 3.4.6. *Aplicația identică $I: (\Phi, q) \to (\Phi, f_\tau, \mu_0)$ definește un izomorfism algebric și topologic între aceste spații.*

Proprietatea de metrizabilitate a *SNP*-spațiilor, cu o metrică invariantă la translații, legătura strînsă dintre *SNP*-spații și spațiile numărabil normate sau alte rezultate cunoscute sugerează o analiză mai concretă a problemei normabilității *SNP*-spațiilor.

Se știe că A. N. Kolmogorov a dat o caracterizare spațiilor liniare topologice care sînt normabile prin proprietatea de a fi separate de tipul T_1 și a poseda o vecinătate convexă și mărginită a originii. Acest rezultat ne îndreaptă atenția spre găsirea unor condiții cînd (ε, λ)-topologia *SNP*-spațiilor conține o vecinătate cu proprietățile cerute de teorema lui Kolmogorov deoarece ea satisface axioma de separație T_1.

În primul rînd pornind de la proprietatea homeomorfismelor liniare de a păstra mărginirea și convexitatea mulțimilor și de la existența homeomorfismului liniar între *SNP*-spațiile finit dimensionale și spațiile euclidiene de aceeași dimensiune rezultă că teorema lui Kolmogorov implică

Teorema 3.4.7. *Orice SNP-spațiu finit dimensional este normabil.*

Pentru a utiliza teorema lui Kolmogorov și pentru clase mai generale de *SNP*-spații să ne ocupăm mai în detaliu de problema mărginirii mulțimilor în SNP-spații. Pornind de la definiția generală din spații liniare topologice vom spune că o mulțime $A \subseteq L$ este *mărginită* dacă oricare ar fi o vecinătate a originii $S(\varepsilon, \lambda)$ există un $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, astfel încît $aA \subseteq S(\varepsilon, \lambda)$. Este posibil ca însăși vecinătăți ale originii să fie mulțimi nemărginite. În cazul *SNP*-spațiilor se formulează [268] un criteriu mai simplu pentru mărginirea mulțimilor dat de

Propoziția 3.4.5. *Fie un SNP-spațiu (L, f, μ) și $A \subseteq L$. Mulțimea A este mărginită dacă și numai dacă pentru orice $n \in \mathbf{N}$ există o constantă c_n astfel încît oricare ar fi $X \in A$ avem că $||X; c_n|| < 1/n$.*

Demonstrație. Dacă relația din propoziție are loc atunci $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \{X: ||X; c_n|| < 1/n\} = B$ și este suficient să arătăm că B este

mărginită. În acest scop observăm că pentru orice $S(\varepsilon, \lambda)$ dată putem alege n_0 astfel încît $n_0\varepsilon > 1$ și $m = \lambda/c_{n_0}$. Vom avea

$$mB = \bigcup_{n \in N}\{X: \|X; mc_n\| < 1/n\} \subseteq \{X: \|X; mc_{n_0}\| < 1/n_0\} \subseteq \{X: \|X; \lambda\| < \varepsilon\} = S(\varepsilon, \lambda).$$

Reciproc, să presupunem că nu are loc relația de caracterizare, atunci înseamnă că se poate determina un n_0 și un șir $\{X_n\} \subseteq A$ astfel încît să avem $\|X_n; n\| \geqslant 1/n_0$. Cum A este presupusă mărginită rezultă că există $m \in \mathbf{N}$ astfel încît $mA \subseteq S(1/n_0, \lambda)$ adică avem $\|mX; \lambda\| = \|X; \lambda/m\| < 1/n_0$ pentru orice $X \in A$. În acest caz pentru $n > \lambda/m$ deducem că $\|X; n\| \leqslant \leqslant \|X; \lambda/m\| < 1/n_0$ pentru orice $X \in A$ adică o contradicție și propoziția este demonstrată.

Rezultă ușor că avem următoarea caracterizare:

Corolar. *O mulțime A dintr-un SNP-spațiu este mărginită dacă și numai dacă există o funcție $U \in \mathcal{G}$ astfel încît să avem $\|X; .\| \leqslant U(.)$ oricare ar fi $X \in A$.*

În ceea ce privește existența unor vecinătăți convexe ale originii să observăm că în *SNP*-spații despre două elemente $X, Y \in S(\varepsilon, \lambda)$ nu putem deduce decît cel mult că $\|aX + (1-a)Y; \lambda\| < 2\varepsilon$, $a \in [0, 1]$, deci inegalitatea triunghiului formulată cu ajutorul unei funcții triunghiulare arbitrare nu asigură convexitatea sferei probabiliste în timp ce în spații normate convexitatea sferei de rază ε este asigurată de inegalitatea triunghiului pentru normă. Cu toate acestea avem

Propoziția 3.4.6. *Orice SNP-spațiu (L, f, μ) cu $\mu \leqslant \mu_0$ (μ_0 fiind dată de relația* (II)) *este un spațiu liniar topologic local convex.*

Demonstrație. Fie $S(\varepsilon, \lambda)$ un element arbitrar al bazei (ε, λ)-topologiei definită pe L, atunci pentru orice $X, Y \in S(\varepsilon, \lambda)$ și $a \in [0, 1]$ deducem că

$$\|aX + (1-a)Y; \lambda\| \leqslant \mu(\|aX; .\|, \|(1-a)Y; .\|; \lambda) = \mu_0(\|aX; .\|, \|(1-a)Y; .\|; \lambda) =$$

$$= \inf_{t \in [0, 1]} \max\{\|aX; t\lambda\|, \|(1-a)Y; (1-t)\lambda\|\} \leqslant \max\{\|aX; a\lambda\|, \|(1-a)Y; (1-a)\lambda\|\} < \varepsilon$$

și deci (ε, λ)-topologia este local convexă.

Observație. Această propoziție oferă o afirmație parțial reciprocă pentru teorema 3.4.1 căci (L, f, μ) fiind local convex, cu ajutorul funcționalelor lui Minkowski îl putem organiza ca spațiu numărabil normat.

Din corolarul de mai sus, propoziția 3.4.6 și teorema de normalitate a lui Kolmogorov deducem

Teorema 3.4.8. *Orice SNP-spațiu (L, f, μ) cu $\mu \leqslant \mu_0$ este normabil dacă și numai dacă există $U \in \mathcal{G}$ și (ε', λ') astfel încît pentru orice $X \in S(\varepsilon', \lambda')$ să avem $\|X; .\| \leqslant U(.)$.*

Să ne ocupăm acum de problema normabilității unei clase de SNP-spații generate cu ajutorul unui element $U \in \mathcal{G}$, $U \neq H^0$ și a unei constante $s(X)$. Vom obține astfel un rezultat similar cu propoziția 3.4 din [221] și anume vom avea

Teorema 3.4.9. *Dacă (L, f, μ) este un SNP-spațiu cu proprietatea că $\mu \leqslant \mu_0$ iar f este definită cu ajutorul unei funcții $U \in \mathcal{G}$, $U \neq H^0$ prin*

$$\|X; x\| = \begin{cases} U(x/s(X)), & \text{pentru } X \neq \theta, \\ H^0, & \text{pentru } X = \theta \end{cases}$$

unde $s(X) > 0$ pentru $X \neq \theta$ și $s(\theta) = 0$, atunci (L, f, μ) este un spațiu normabil.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Să observăm că din axioma 2) a SNP-spațiilor deducem că $s(cX) = |c|\, s(X)$ pentru orice $X \in L$ și orice scalar c. Dacă presupunem că $X+Y \neq \theta$ vom avea $\|X+Y\,; x\| = U(x/s(X+Y)) \leqslant \mu(\|X\,;.\|, \|Y\,;.\|\,; x) \leqslant$ $\leqslant \mu_0(\|X\,;.\|, \|Y\,;.\|\,; x) \leqslant \max\,[U(tx/s(X)), U((1-t)x/s(Y))]$ pentru orice $t \in [0,1]$ și $x \in \mathbf{R}$.

Fie $t = s(X)/(s(X)+s(Y))$, atunci introducîndu-l în inegalitatea de mai sus obținem că

$$U(x/s(X+Y)) \leqslant U(x/s(X)+s(Y)))$$

Cum $U \in \mathcal{Q}$ este necrescătoare deducem că $s(X+Y) \leqslant s(Y)+s(X)$.

Pe de altă parte avînd că această inegalitate are loc evident pentru cazul cînd $X+Y=\theta$ sau unul dintre vectorii X sau Y este nul și de asemenea avînd că $s(X)=0$ dacă și numai dacă $X=\theta$ rezultă că s este o normă pe L. Cum prin calcul direct obținem echivalența (ε, λ)-topologiei cu topologia normei, rezultă că (L, f, μ) este normabil.

Amintind că metrica lui Lévy de pe $\mathcal{R}$ induce pe $\mathcal{Q}$ metrica $d'_L(U,V) =$ $= \inf\,\{h\colon U(x+h)-h \leqslant V(x) \leqslant V(x-h)+h,\ x \in \mathbf{R}\}$ avem

Teorema 3.4.10. *În orice SNP-spațiu (L, f, μ) avem că (ε, λ)-topologia coincide cu cea mai slabă topologie în care $f\colon L \to (\mathcal{Q}, d'_L)$ este continuă în θ.*

Demonstrație. Să arătăm mai întîi că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, avem că

$$\{U \in \mathcal{Q}\colon d'_L(U, H^0) \leqslant 1/n\} = \{U \in \mathcal{Q}\colon U(1/n) < 1/n\}$$

În adevăr, dacă $U \in \mathcal{Q}$ și $U(1/n) < 1/n$ se verifică ușor că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem că $H^0(x+1/n) - 1/n < U(x) < H^0(x-1/n) + 1/n$. Din continuitatea la stînga a lui U și din definiția lui H^0 deducem că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există $h' < 1/n$ astfel încît să avem că $H^0(x+h') - h' < U(x) <$ $< H^0(x-h') + h'$. Aceasta este echivalentă cu a scrie că $d'_L(U, H^0) \leqslant h' < 1/n$.

Reciproc, dacă $d'_L(U, H^0) < 1/n$ și considerăm $a = d'_L(U, H^0) \geqslant 0$ atunci rezultă că există $b > 0$ astfel încît $a+b < 1/n$. Atunci putem scrie că

$$U(1/n) < H^0(1/n - (a+b)) + a + b < 1/n$$

ceea ce încheie justificarea afirmației de mai sus.

Pentru demonstrația propriu-zisă a teoremei pornim de la observația că $(\mathcal{Q}, d'_L)$ fiind spațiu metric putem considera familia $\mathcal{S}$ a sferelor $S = \{U \in \mathcal{Q}\colon d'_L(U, f(\theta) = H^0) < 1/n\}$. Să notăm prin $\mathcal{S}' = \{f^{-1}(S)\colon S \in \mathcal{S}\}$, atunci pentru orice $S' \in \mathcal{S}'$ există $S \in \mathcal{S}$ și $n \in \mathbf{N}$ astfel încît să avem $S' = f^{-1}(S) = \{X \in L\colon f(X) \in S\}$. Atunci avem că

$$S' = \{X \in L\colon d'_L(f(X), H^0) < 1/n\} = \{X \in L\colon ||X\,; 1/n|| < 1/n\}.$$

Deducem astfel că $\mathcal{S}'$ este identică cu o bază numărabilă de vecinătăți ale lui θ care transformă pe (L, f, μ) în spațiu liniar topologic. Cum $f^{-1}(S)$ este deschisă pentru orice $S \in \mathcal{S}$ rezultă că f este continuă în θ și cea mai slabă topologie de spațiu liniar topologic pentru L, în care f este continuă în θ, coincide cu cea definită de (ε, λ)-topologia lui L.

Continuitatea pe (L, f, μ) o deducem din

Teorema 3.4.11. *Fie (L, f, μ) un SNP-spațiu, atunci $\mu(||X\,;.||, ||Y\,;.||\,;.)$ este continuă ca funcție de X și Y în sensul că $X_n \to X$, $Y_m \to Y$ implică $\mu(||X_n\,;.||, ||Y_m\,;.||\,; x) \to \mu(||X\,;.||, ||Y\,;.||\,; x)$ în orice punct $x \in \mathbf{R}$ de continuitate pentru $\mu(\|X\,;.\|, \|Y\,;.\|\,;.)$ ceea ce este echivalent cu faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît pentru orice $n, m > n_0$ să avem $d'_L(\mu(f(X_n), f(Y_m)), \mu(f(X), f(Y))) < \varepsilon$.*

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea avem următoarea

Consecință. Norma probabilistă din (L, f, μ) este continuă ca funcție pe (L, f, μ) cu valori în $(\mathcal{Q}, d'_L)$.

Propoziția 3.4.7. [268], [269] *Pentru orice SNP-spațiu* (L, f, μ) *există un completat* (L', f', μ') *cu* $\mu' \geqslant \mu$, *dacă* μ *este continuă avem* $f = f'$ *și* $\mu = \mu'$.

4.2. APLICAȚII LINIARE PE *SNP*-SPAȚII

Teoria probabilistă a operatorilor este acea ramură a analizei probabiliste care se ocupă cu studiul operatorilor cu valori variabile aleatoare sau a operatorilor aleatori în general. Dezvoltarea acestei teorii este îndreptată spre generalizarea teoriei deterministe a operatorilor avînd o deosebită importanță în studiul ecuațiilor cu operatori și al diferitelor clase de ecuații aleatoare. Această teorie este relativ recentă deși exemple sau cazuri concrete au apărut de multă vreme. Teoria modelării diferitelor tipuri de sisteme a impus lărgirea opticii care punea accentul mai mult pe aleatorizarea condițiilor inițiale, îndreptîndu-se spre clase de operatori care să descrie comportarea însăși a sistemelor în timp. Aceasta s-a impus, mai ales, datorită imposibilității de a cunoaște exact coeficienții operatorilor diferențiali sau cu diferențe folosiți la modelări precum și datorită caracterului aleator al aproximării sau al erorilor.

Modelarea cu ajutorul unor ecuații integrale, direct sau indirect, provenind dintr-o problemă la limită pe frontieră, s-a dezvoltat în ultimul timp în direcția aleatorizării nucleelor sau a operatorilor diferențiali înlocuindu-se cu variabile aleatoare sau funcții aleatoare. Această cale este preferată față de aceea a procesului de mediere care conduce la pierderea unei mari cantități de informație privind comportarea sistemului.

Deosebirea dintre abordarea deterministă și cea probabilistă în formularea ecuațiilor cu operatori se găsește în însăși natura problemelor la care încearcă să răspundă și în interpretarea rezultatelor obținute. Avantajul abordării probabiliste constă în marea generalitate a problemei încă de la formularea ei inițială și posibilitatea de a include în model caracteristicile aleatoare, cele ce joacă un rol important în apropierea modelării de semnificația reală a fenomenelor.

Ne vom mărgini la prezentarea cîtorva rezultate semnificative pe linia încadrării operatorilor liniari pe *SNP*-spații în problematica clasică a mărginirii sau aceea a existenței punctelor fixe pentru anumite clase de operatori.

4.2.1. Aplicații liniare mărginite pe SNP-spații. Să dăm mai întîi

Definiția 3.4.2. Fie (L, f, μ) și (L', f', μ') două *SNP*-spații și $T: (L, f, \mu) \to (L', f', \mu')$ o aplicație liniară. Spunem că T este *mărginită* sau *probabilistic mărginită* dacă există un scalar $m \geqslant 0$ astfel încît să avem

$$||TX; x|| \leqslant ||mX; x|| \text{ oricare ar fi } X \in L, \ x \in \mathbf{R}$$

și se numește margine pentru T numărul k dat de

$$k = \inf \{m \geqslant 0: ||TX; x|| \leqslant ||mX; x||, \ X \in L, x > 0\}.$$

Evident că și pentru verificarea mărginirii este suficient să lucrăm numai cu $x > 0$ căci $||TX; x|| = 1 = ||mX; x||$ pentru orice $x \leqslant 0$.

Definirea mărginirii într-un mod analog cu cazul spațiilor liniare normate este justificată de observația că dacă T este un operator mărginit și relația de definiție a acestei noțiuni are loc pentru un $m \geqslant 0$ oricare ar fi $X \in L$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ și $X \in L$ avem că $||TX; x|| \leqslant ||(m+\varepsilon)X; x||$.

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, dacă $m = 0$ relația este imediat verificată căci $H^0 \leqslant U$, oricare ar fi $U \in \mathcal{Q}$. Dacă $m > 0$, atunci pentru $\varepsilon > 0$ și $x > 0$ putem scrie că $x/m > x/(m+\varepsilon)$ și

$$||mX; x|| = ||X; x/m|| \leqslant ||X; x/(m+\varepsilon)|| = ||(m+\varepsilon)X; x||$$

De asemenea se verifică ușor că k are proprietatea cerută lui m în prima parte a definiției adică $||TX; x|| \leqslant ||kX; x||$ oricare ar fi $X \in L$ și $x \in \mathbf{R}$.

În adevăr, din definiția lui k rezultă că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem

$$||TX; x|| \leqslant ||(k+1/n)X; x|| \leqslant \mu(f(kX), f((1/n)X); x)$$

În plus, $(1/n)X \to \theta$ pentru $n \to \infty$, pentru că (L, f, μ) este un spațiu liniar topologic iar din teorema 3.4.11 deducem că $\mu(f(kX), f((1/n)X); x) \to f(kX)$ pentru $n \to \infty$, în orice punct de continuitte al lui $f(kX)$. Cum $f((1/n)X) \geqslant H^0$ rezultă că $\mu(f(kX), f((1/n)X; x) \downarrow ||kX; x||$ adică $||TX; x|| \leqslant ||kX; x||$. Aceste relații au loc în punctele de continuitate ale lui $f(kX)$ însă elementele lui $\mathcal{Q}$ fiind necrescătoare, continue la stînga și mărginite, deducem că $||TX; x|| \leqslant ||kX; x||$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Se deduce ușor că $TX = \theta'$, oricare ar fi $X \in L$ și θ' elementul nul din L', dacă și numai dacă $k = 0$. În adevăr, dacă $TX = \theta'$ rezultă că $||TX; x|| = H^0(x) = ||0X; x||$ adică $k = 0$ iar dacă $k = 0$ din proprietatea anterioară rezultă că $||TX; x|| \leqslant ||0X; x|| = H^0(x)$ adică $f'(TX) = H^0$ ceea ce este tot una cu $TX = \theta'$.

Propoziția 3.4.8. *Fie $(L, ||\cdot||)$ și $(L', ||\cdot||')$ două spații liniare normate, T o aplicație liniară $T: L \to L'$, mărginită, atunci T este o aplicație liniară și mărginită de la $(L, f_{||\cdot||}, \mu_0)$ la $(L', f_{||\cdot||'}, \mu_0)$ acestea fiind scufundările naturale ale spațiilor normate în clasa SNP-spațiilor iar cele două margini coincid.*

Relativ la mărginirea și continuitatea operatorilor în *SNP*-spații avem

Teorema 3.4.12. *Orice aplicație liniară $T: (L, f, \mu) \to (L', f', \mu')$ probabilistic mărginită este și continuă.*

Cu privire la afirmația inversă se pot da exemple de aplicații liniare și continue pe *SNP*-spații care nu sînt probabilistic mărginite.

Propoziția 3.4.9. *Dacă (L, f, μ) este un SNP-spațiu finit dimensional atunci orice aplicație liniară pe (L, f, μ) cu valori în orice SNP-spațiu este continuă.*

Prin urmare există deosebiri între mărginirea probabilistă și continuitatea operatorilor liniari pe *SNP*-spații și se pare că un alt tip de mărginire este mai legat de continuitatea aplicațiilor liniare și anume acela care introduce mărginirea prin proprietatea de a duce mulțimi mărginite în mulțimi mărginite. În acest caz avem

Propoziția 3.4.10. *O aplicație liniară de la un SNP-spațiu la altul este continuă dacă și numai dacă imaginea oricărei mulțimi mărginite este mărginită.*

Acesta constituie un rezultat cunoscut pentru spații liniare topologice și metrizabile.

În [215] se folosește această definiție pentru a da o normă aleatoare pe spațiul aplicațiilor liniare și mărginite de la (L, f, μ) la (L', f', μ') notat prin $\mathcal{L}(L, L')$. Se admite existența unui element $U \in \mathcal{Q}$ astfel încît să avem că $\sup\{x: U(x) = 1\} = 1$ și dacă pentru orice $X \in L$ există un $c_X > 0$ astfel încît $||c_X X; x|| \leqslant U$ atunci pe $\mathcal{L}(L, L')$ se poate introduce o structură de *SNP*-spațiu cu norma aleatoare $||T; x||_U = \inf_{t<x} \sup_{||X; \cdot|| \leqslant U} ||TX; t||$.

Scanned with OKEN Scanner

Se arată că proprietatea de convergență în $\mathcal{L}(L, L')$ implică convergența punctuală a șirului T_n și dacă L' este complet rezultă completitudinea lui $\mathcal{L}(L, L')$.

Alte rezultate care apropie comportarea SNP-spațiilor de aceea a spațiilor liniare normate sînt cuprinse în

Teorema 3.4.13. *Fie* $T: (L, f, \mu) \to (L', f', \mu')$, *atunci vom avea:*

1) T^{-1} *există și este probabilistic mărginit pe* $T(L) \subseteq L'$ *dacă și numai dacă există* $m > 0$ *astfel încît are loc relația* $||mX; x|| \leqslant ||TX; x||$ *pentru orice* $X \in L$ *și* $x > 0$.

2) *Dacă există* m', $m'' > 0$ *astfel încît* $||m'X; x|| \leqslant ||TX; x|| < ||m''X; x||$ *pentru orice* $X \in L$ *și* $x > 0$, *atunci* L *și* L' *sînt liniar homeomorfe.*

3) *Dacă* L *este un spațiu liniar și două norme probabiliste* f_1, f_2 *definite pe* L *avem că dacă există* m', $m'' > 0$ *astfel încît să aibă loc relația* $f_1(m'X) \leqslant f_2(X) \leqslant f_1(m''X)$ *pentru orice* $X \in L$, *atunci acestea definesc aceeași topologie pe* L.

Demonstrație. 1) Dacă T^{-1} există și este probabilistic mărginit, atunci există $m_1 \geqslant 0$ astfel încît $||T^{-1}(Y); x|| \leqslant ||mY; x||$ pentru orice $Y \in T(L)$. Dacă $m_1 = 0$ atunci $T^{-1}(Y) = \theta$ și deci $m > 0$ poate fi orice număr. Dacă $m_1 > 0$, atunci $||T^{-1}(Y); x|| \leqslant ||Y; x/m_1||$ pentru orice x. Fie $y = x/m_1$, atunci $||T^{-1}(Y); m_1 y|| \leqslant ||Y; y||$. Fie $m = 1/m_1$, atunci cum T^{-1} există rezultă că $T^{-1}(Y) = X$ dacă și numai dacă $TX = Y$. Obținem deci că $||mX; y|| \leqslant ||TX; y||$ pentru orice y.

Dacă $||mX; x|| \leqslant ||TX; x||$ și $TX = \theta'$, atunci $||TX; x|| = H^0(x)$. Prin urmare $||X; x/n|| = H^0(x)$ așa că $X = \theta$. Cum T este liniară rezultă că există T^{-1} pe $T(L)$. Avem că $Y = TX$ dacă și numai dacă $T^{-1}(Y) = X$ iar $m > 0$ implică $||T^{-1}(Y); x/m|| \leqslant ||Y; x||$ pentru orice x. Fie $y = x/m$ și $m_1 = 1/m$, atunci putem scrie că $||T^{-1}(Y); y|| \leqslant ||Y; ym|| = ||(1/m)Y; y|| = ||m_1 Y; y||$ adică T^{-1} este probabilistic mărginit.

2) Inegalitatea stîngă asigură existența și continuitatea lui T^{-1} iar cea dreaptă asigură mărginirea probabilistică deci continuitatea lui T.

3) Înlocuind pe T cu aplicația identică în 2) obținem rezultatul cerut.

4.2.2. Rezultate privind structura izometriilor pe SNP-spații. Pornind de la teorema lui S. Mazur și S.Ulam privind liniaritatea izometriilor unui spațiu liniar normat în altul (aplicații T cu proprietatea $||TX|| = ||X||$ și $T(\theta) = \theta$), D. Kh. Mushtari obține rezultate similare pe SNP-spații și anume:

Teorema 3.4.14. *Orice izometrie a două SNP-spații este o transformare liniară afină.*

Demonstrație. Să amintim mai întîi că unei mulțimi mărginite $A \subseteq L$ i se poate asocia un element $\delta(A) \in \mathcal{Q}$ anumit diametrul lui A definit prin $\delta(A) = \sup_{X, Y \in A} ||X - Y; .||$.

Fie $T: (L, f, \mu) \to (L', f', \mu')$ o izometrie a acestor SNP-spații și $X_0, Y_0 \in L$ și să definim un șir de mulțimi mărginite în L, care conțin elementul $(X_0 + Y_0)/2$, prin

$$B_1(X_0, Y_0) = \left\{X: ||X - Y_0; .|| = ||X_0 - X; .|| = \frac{1}{2} \circ ||X_0 - Y_0; .||\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$B_n(X_0, Y_0) = \left\{X: X \in B_{n-1}, \|X - Y; .\| \leqslant \frac{1}{2} \circ \delta(B_{n-1}) \text{ pentru orice } Y \in B_{n-1}\right\}$$

unde s-a notat prin $(c \circ U)(x) = U(x/c)$, $0 \circ U = H^\circ$ și se știe că $\|cX; .\| = |c| \circ \|X; .\|$ pentru orice $X \in L$.

Se verifică ușor că $B_1(X_0, Y_0)$ este mărginită și că $\delta(B_1(X_0, Y_0)) \leqslant$

$$\leqslant \mu_1\left(\frac{1}{2} \circ \|X_0 - Y_0; .\|, \frac{1}{2} \circ \|X_0 - Y_0; .\|\right) = \frac{1}{2} \circ \mu_1(\|X_0 - Y_0; .\|, \|X_0 - Y_0; .\|).$$

Întrucît $\|X_0 - (X_0 + Y_0)/2; .\| = \|Y_0 - (X_0 + Y_0)/2; .\| = \frac{1}{2} \circ \|X_0 - Y_0; .\|$

rezultă că $(X_0 + Y_0)/2 \in B_1(X_0, Y_0)$.

De asemenea avem

$$\|X - X_0; .\| = \|(X_0 + Y_0 - X) - Y_0; .\|, \|X - Y_0; .\| = \|(X_0 + Y_0 - X) - X_0; .\|$$

adică din $X \in B_1(X_0, Y_0)$ se deduce că $X_0 + Y_0 - X \in B_1(X_0, Y_0)$ iar prin inducție obținem că $(X_0 + Y_0)/2 \in B_n(X_0, Y_0)$ și

$$\delta(B_n(X_0, Y_0)) \leqslant (1/2)^{n+1} \circ \mu_1(\|X_0 - Y_0; .\|, \|X_0 - Y_0; .\|)$$

iar $X \in B_n(X_0, Y_0)$ implică $X_0 + Y_0 - X \in B_n(X_0, Y_0)$. Cum $\delta(B_n(X_0, Y_0)) \to H^0$ pentru $n \to \infty$ atunci rezultă că $\bigcap_{n \in N} B_n(X_0, Y_0) = (X_0 + Y_0)/2$. Pe de altă parte $B_n(T(X_0), T(Y_0))$, $n \in \mathbf{N}$ se definesc numai cu relații metrice din L și L', deci avem că $T(B_n(X_0, Y_0)) = B_n(T(X_0), T(Y_0))$ și

$$T\left(\frac{X_0 + Y_0}{2}\right) = T\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} B_n(X_0, Y_0)\right) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} T(B_n(X_0, Y_0)) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} B_n(T(X_0), T(Y_0)) =$$

$$= (T(X_0) + T(Y_0))/2.$$

Printr-un calcul simplu obținem că $T(r_n X_0 + (1 - r_n) Y_0) = r_n T(X_0) +$ $+ (1 - r_n) T(Y_0)$ pentru orice șir de numere raționale diadice $\{r_n\}$ cu $|r_n| \leqslant 1$ în care trecînd la limită rezultă că T este afină.

Consecință. Orice bijecție a două spații metrice liniare care verifică relația

$$(1) \qquad |cY| = |cT(X + Y) - cT(X)| \text{ pentru orice } c \in \mathbf{R}$$

este o aplicație afină (se notează prin $|\cdot|$ metrică invariantă corespunzătoare).

Propoziția 3.4.11. *Dacă T este o bijecție între două spații metrice liniare care verifică relația* (1) *pentru orice $c = 1/2^n$, $n = 0, 1, \ldots$ atunci T este o transformare afină.*

Teorema 3.4.15. *Să presupunem că normele aleatoare din L și L' sînt strict monotone pe $(0, \infty)$ are loc inegalitatea triunghiului în L și L' în raport cu μ_0 și T este o bijecție între L și L' care verifică relația*

$$(2) \qquad \|X - Y; \lambda\| = \|T(X) - T(Y); \lambda\|$$

pentru orice $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ cu proprietatea că λ_1/λ_2 este irațional. Atunci T este o aplicație afină.

Din propoziția 3.4.3, propoziția 3.4.13 și teorema anterioară deducem

Teorema 3.4.16. *Orice izometrie a două spații metrice liniare cu sistemul vecinătăților lui zero format din mulțimi convexe este o aplicație afină.*

Scanned with OKEN Scanner

4.2.3. Structuri aleatoare pe spațiul aplicațiilor liniare pe SNP-spații și alte aplicații ale normelor aleatoare. În acest subparagraf vom lucra cu familia $\mathcal{R}_v^+$ în locul familiei $\mathcal{Q}$, o t-normă continuă T iar norma aleatoare va fi notată prin $\mathcal{F}(.)=\|.;.\|: L \to \mathcal{R}_v^+$. În acest caz axioma 1) din definiția SNP-spațiilor va avea în loc de H^0 pe H_0 iar axioma 3) devine

3') $\|X+Y; x+y\| \geqslant T(\|X; x\|, \|Y; y\|)$ pentru orice $X, Y \in L$ și $x, y > 0$.

Fie $f: (L, \|.;.\|, T) \to (L', \|.;.\|', T')$ o aplicație liniară iar A o mulțime mărginită și absorbantă din L. Vom nota prin

$$\bar{\nu}_f^A = \inf_{X \in A} \|f(X);.\|' \quad \text{și} \quad \nu_f^A(x) = \sup_{t<x} \bar{\nu}_f^A(t) \quad [219].$$

Teorema 3.4.17. 1) *Dacă f este continuă atunci $\nu_f^A \in \mathcal{R}_v^+$.*

2) *Fie $\mathcal{L} = \mathcal{L}(L, L')$ spațiul aplicațiilor liniare și continue $f: L \to L'$; atunci $(\mathcal{L}, \mathcal{F}^A, T')$ este un spațiu normat aleator unde $\mathcal{F}^A(f) = \nu_f^A$.*

Demonstrație. 1) Ipoteza de continuitate a lui f fiind echivalentă cu proprietatea de a duce mulțimile mărginite în mulțimi mărginite iar mărginirea unei mulțimi B în spații normate aleatoare fiind echivalentă cu existența unei funcții $F \in \mathcal{R}_v^+$ cu proprietatea că $\|X;.\| \geqslant F$, pentru orice $X \in B$, rezultă că 1) are loc.

2) Vom avea, evident că $\nu_f^A = H_0$ dacă și numai dacă $f = 0$ pentru că A este absorbantă și în L' are loc prima axiomă de definiție a SNP-spațiilor. De asemenea axioma a doua este evidentă iar pentru axioma a treia observăm

$$\bar{\nu}_{f+g}^A(x+y) = \inf_{X \in A} \|(f+g)(X);\ x+y\|' \geqslant \inf_{X \in A} T'(\|f(X); x\|', \|g(X); y\|') \geqslant$$

$$\geqslant T'(\inf_{X \in A} \|f(X); x\|', \inf_{X \in A} \|g(X); y\|') = T'(\bar{\nu}_f^A(x), \bar{\nu}_g^A(y))$$

și din monotonia lui T rezultă justificarea axiomei dorite și structura de SNP-spațiu pe $\mathcal{L}$.

Observație. Rezultatul de mai sus se menține și dacă L' este un spațiu liniar topologic arbitrar.

Propoziția 3.4.12. 1) *Topologia convergenței punctuale în $\mathcal{L}$ este mai slabă decît (ε, λ)-topologia din $\mathcal{L}$.*

2) *Dacă $(L', \|.;.\|', T')$ este complet atunci $\mathcal{L}$ este complet.*

Se poate defini un element din $\mathcal{R}_v^+$ asociat lui f care să caracterizeze continuitatea sa și anume considerăm $F \in \mathcal{R}_v^+$ și definim

$$\bar{\nu}_f(F) = \inf_{\|X;.\| \geqslant F} \|f(X);.\| \quad \text{și} \quad \nu_f(F)(x) = \sup_{t<x} \bar{\nu}_f(F)(t).$$

Vom avea

Teorema 3.4.18. *O aplicație liniară $f: L \to L'$ este continuă în (ε, λ)-topologiile respective dacă și numai dacă are loc una din condițiile:*

a) *$\nu_f(F) \in \mathcal{R}_v^+$ pentru orice $F \in \mathcal{R}_v^+$,*

b) *ν_f este slab continuă în H_0 (adică $F_n(x) \to 1$ pentru orice $x > 0$ implică $\nu_f(F_n)(x) \to 1$ pentru orice $x > 0$).*

Demonstrație. a) Fie $f: L \to L'$, continuă și fie $A = \{X \in L: \|X;.\| \geqslant F\}$. Întrucît A este mărginită rezultă că $f(A)$ este mărginită și deci există $G \in \mathcal{R}_v^+$ astfel încît să avem $\|f(X);\cdot\| \geqslant G$ pentru orice $X \in A$ ceea ce atrage după sine că $\nu_f(F) \in \mathcal{R}_v^+$. Reciproc, dacă A este o mulțime mărginită în L

Scanned with OKEN Scanner

și $F \in \mathcal{R}_v^+$ astfel că $F \leqslant ||X;.||$ pentru orice $X \in A$ atunci din relația evidentă $\nu_f(F) \leqslant ||f(X);.||$ pentru orice $X \in A$ și $\nu_f(F) \in \mathcal{R}_v^+$ rezultă că $f(A)$ este mărginită și deci f este continuă.

b) Să presupunem că $F_n \to H_0$ și $\nu_f(F_n) \to H_0$, atunci există $x_0 > 0$ și $\lambda_0 \in (0, 1)$ astfel încît pentru orice n există $m_n \geqslant n$ pentru care $\nu_f(F_{m_n})(x_0) < 1-\lambda_0$. Fie $X_n \in L$ astfel încît $||X_n;.|| \geqslant ||X_{m_n};.||$ și $||f(X_n);x_0|| > 1-\lambda_0$, atunci rezultă că $||X_n;.|| \to H_0$ dar $||f(X_n);.|| \not\to H_0$ și f n-ar fi continuă. Reciproca este evidentă și teorema este demonstrată.

Propoziția de mai sus sugerează o nouă caracterizare a continuității aplicațiilor liniare prin

Propoziția 3.4.13. O aplicație liniară $f: L \to L'$ este continuă dacă și numai dacă există $\nu: \mathcal{R}_v^+ \to \mathcal{R}_v^+$ astfel încît să avem:

a) ν este slab continuă în H_0,

b) $\nu(||X;.||) \leqslant ||f(X);.||$ pentru orice $X \in L$.

Propoziția 3.4.14. Fie $f: (L, ||.;.||, T) \to (L', ||.;.||', T')$, $g: (L', ||.;.||', T') \to (L'', ||.;.||'', T'')$ aplicații liniare, continue. Atunci $g \circ f$ este o aplicație liniară continuă și $\nu_{g\circ f} \geqslant \nu_g \circ \nu_f$.

În cele ce urmează amintim cîteva aspecte privind SNP-spațiul operatorilor liniari slab măsurabili pe l_2 cu măsura abstractă Wiener [193]. Mai întîi să amintim că pe familia aplicațiilor măsurabile $f: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ fiind spațiu Banach separabil se poate defini o normă probabilistă prin $||f;r|| = P(\{||f|| > r\})$ unde P este o repartiție probabilistă pe $\mathcal{X}$ definită în sensul lui Y. V. Prohorov [214] ca o funcție de mulțime numărabil aditivă, de masă 1 și cu anumite condiții de compatibilitate. În felul acesta la rîndul ei f definește o nouă repartiție pe $\mathcal{X}$ prin $P_f(G) = P(f^{-1}(G))$. Norma probabilistă introdusă se poate exprima simplu cu ajutorul metricii lui Prohorov [214] definită pe spațiul repartițiilor pe $\mathcal{X}$, care se știe că induce o topologie echivalentă cu cea dată de convergența slabă a măsurilor. Vom avea că $||f;r|| = \inf_{\varepsilon} \{d(P_{\varepsilon f/r}, P_0) < \varepsilon\}$, d = metrica lui Prohorov. Amintim că un operator liniar A pe l_2 se numește slab măsurabil dacă funcționala (e_n, Ax) este măsurabilă pentru orice e_n, $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ fiind un element al bazei din l_2. O condiție necesară și suficientă pentru slab măsurabilitatea unui operator $A = \{a_{mn}\}$ este dată de relația $\sum_n a_{mn}^2 < \infty$ pentru orice m și $|A|(x) = \sqrt{(\sum_n a_{mn}x_n)^2}$, unde $x = (x_n) \in l_2$ și atunci se verifică ușor că pentru orice $A \in \mathcal{A}$ funcția $|A|(x)$ este măsurabilă $(\mathcal{A} = \{A = \{a_{mn}\}: \sum_n a_{mn}^2 < \infty, \forall m \in \mathbf{N}\})$.

De asemenea, cu aceste precizări făcute se poate introduce o pseudonormă probabilistă pentru operatorii $A \in \mathcal{A}$ prin $||A;r|| = P(\{|A| > r\})$ care evident verifică condițiile din definiția normei probabiliste cu $\mu = \mu_1$ abstracție făcînd eventual de condiția $\lim_{r\to\infty} ||A;r|| = 0$. Se pune problema găsirii unor condiții pentru ca $||A;.||$ să fie normă aleatoare, ceea ce este tot una cu condiția ca $A = \{a_{mn}\}$ să fie definit aproape peste tot pe l_2. Se știe că orice operator mărginit satisface această condiție. Se arată [189] că în SNP-spațiul operatorilor liniari și mărginiți are loc axioma triunghiului pentru $\mu = \mu_1$ dar nu are loc pentru μ_0 și nu se știe dacă există o funcție triunghiulară mai bună ca μ_1.

O condiție necesară pentru existența operatorilor $A \in \mathcal{A}$, $A = \{a_{mn}\}$ definit a.p.t. pe l_2 este ca A să fie definit pe elementele $x = \sum_n x_n e_n$ cu proprietatea că $\sum_n n^2 x_n^2 < \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind notațiile $A_{m\cdot} = P_m A$, $A_{\cdot n} = A P_n$, $A_{nk} = P_n A P_k$, unde $P_m(e_k) = e_k$ pentru $k \leqslant m$ și $P_m(e_k) = 0$ pentru $k > m$, se arată [193] că dacă $A = \{a_{mn}\}$ verifică relația $\sum_{m,n} a_{mn}^2/n^{1-\varepsilon} < \infty$ atunci $A_{\cdot m} \to A$ a.p.t. și că pentru orice $A \in \mathcal{A}$ există un șir $\{n_m\}$ astfel că $A_{mn_m} x \to Ax$ pentru orice x pentru care $|A|(x) < \infty$. De asemenea rezultă că pentru $A \in \mathcal{A}$ există un șir $\{n_m\}$ astfel încît $||A_{mn_m}; .|| \to ||A; .||$.

Rezultatul fundamental [193] este dat de faptul că în spațiul $\mathcal{A}^0$ al operatorilor A cu proprietatea $a_{mn} = 0$ pentru $m > m_0$, $n > n_0$ topologia definită de norma probabilistă este normabilă cu norma $\sum_{m,n} a_{mn}^2/n^2$. Deci $A \in \mathcal{A}$ este definit a.p.t. pe l_2 dacă și numai dacă $\sum_{m,n} a_{mn}^2/n^2 < \infty$ și convergența în măsură este echivalentă cu convergența în $||A||_1 = \sum_{m,n} a_{mn}^2/n^2$ definită pe spațiul operatorilor $A \in \mathcal{A}$ a.p.t. definiți pe l_2.

În încheierea acestui subparagraf să amintim că în teoria algebrelor de operatori pe spații Hilbert se numește centru $Z_{\mathbf{M}}$ al unei algebre $\mathbf{M}$, mulțimea elementelor din $\mathbf{M}$ care comută cu orice element din $\mathbf{M}$. Fiind dată o mulțime $\mathbf{S} \subseteq \mathcal{L}(H)$ ($\mathcal{L}(H)$ este algebra operatorilor liniari și mărginiți pe spațiul Hilbert H) se notează prin $\mathbf{S}^* = \{A^* : A \in \mathbf{S}\}$ și prin $\mathbf{S}'$ mulțimea operatorilor din $\mathcal{L}(H)$ care comută cu orice operator din $\mathbf{S} \cup \mathbf{S}^*$. Mulțimea $\mathbf{S}'$ este o algebră slab închisă care conține operatorul unitate și se numește comutantul mulțimii $\mathbf{S}$. Se arată ușor că $Z_{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$ iar atunci cînd $\mathbf{M}$ este o algebră slab închisă și $Z_{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$ este o algebră slab închisă. O algebră slab închisă $\mathbf{M}$ se numește *factor* dacă $Z_{\mathbf{M}}$ constă numai din $\{aI\}$ adică $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}' = \{aI\}$, a fiind orice scalar și I operatorul unitate. Printre exemplele de factori amintim pe $\mathcal{L}(H)$ și $\{aI\}$. Se arată [163] că orice măsură unitară m invariantă relativ la un factor $\mathbf{M}$ de clasă finită în spațiul Hilbert complex H este echivalentă cu verificarea inegalității triunghiului față de μ_1 în SNP-spațiul corespunzător asociat.

4.3. STRUCTURI CU PRODUS INTERIOR PROBABILIST

Ideea introducerii structurilor cu produs interior probabilist îi aparține lui M. Senechal [255]. Se așteaptă ca eventualele generalizări pentru obținerea unei geometrii probabiliste necesare modelării unor fenomene întîlnite în teoria cuantică a cîmpului, în studiul unor particule elementare și în general în studiul microcosmosului, să deschidă noi căi de aplicare. Această idee împărtășită de D. I. Blokhintsev va da un nou impuls investigațiilor din acest domeniu.

Vom considera un spațiu liniar real L și vom aminti că unei funcții monotone $G: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i se pot asocia funcțiile G_s și G_d continue la stînga pe $\mathbf{R}$ și respectiv la dreapta care coincid cu G în punctele de continuitate. Evident că dacă G este continuă la stînga această proprietate se transferă și pentru $G_d \circ (-\varphi)$, φ fiind aplicația identică pe $\mathbf{R}$ iar G coincide cu $(G_d)_s$.

Vom avea

Definiția 3.4.3. Se numește *spațiu cu produs interior probabilist* orice pereche $(L, \mathcal{H})$ unde L este un spațiu liniar real iar $\mathcal{H}: L \times L \to \mathcal{R}_v$, notată prin $\mathcal{H}(X, Y) = \langle X, Y; x\rangle$ cu proprietățile:

1) $\langle X, X; 0\rangle = 0$, $\langle X, X; x\rangle = H_0(x)$ implică $x = \theta$,
2) $\langle \theta, X; x\rangle = H_0(x)$,
3) $\langle X, Y; .\rangle = \langle Y, X; .\rangle$,

Scanned with OKEN Scanner

4) a) $\langle X, Y; x\rangle = \langle aX, bY; abx\rangle$, dacă $ab > 0$,
b) $\langle -X, Y; x\rangle = 1 - \langle X, Y; -x\rangle_d$,
5) $\langle X, Z; x\rangle = 1$ și $\langle Y, Z; y\rangle = 1$ implică $\langle X+Y, Z; x+y\rangle = 1$,
6) $\langle X, X; x\rangle = 1$ și $\langle Y, Y; y\rangle = 1$ implică $\langle X, Y; \sqrt{xy}\rangle = 1$.

Interpretînd $H_{XY}(x) = \langle X, Y; x\rangle$ ca fiind „probabilitatea ca produsul interior $\langle X, Y\rangle$ din L să fie mai mic decît x'' obținem că axioma 4b) asigură că probabilitatea ca $\langle -X, Y\rangle < x$ să fie egală cu 1 minus probabilitatea ca $\langle X, Y\rangle < -x$.

În mod analog cu cazul clasic produsul interior probabilist conduce la definirea unei norme probabiliste, axioma 6) asigurînd analogul inegalității lui Schwarz pentru această normă. În adevăr, dacă definim

$$||X: x||^0 = \begin{cases} \langle X, X; x^2\rangle, & \text{pentru } x > 0 \text{ și } X \neq \theta, \\ 0, & \text{pentru } x \leqslant 0 \text{ și } X \neq \theta, \\ H_0(x), & \text{pentru } X = \theta, \end{cases}$$

rezultă din axiomele 1) și 2) că

(I) $||X; 0||^0 = 0$, $||X; x||^0 = H_0(x)$ dacă și numai dacă $X = \theta$ adică pozitiv definirea normei aleatoare iar din axioma 4) rezultă proprietatea de omogenitate față de înmulțirea cu scalari

(II) $||aX; x||^0 = ||X; x/|a|||^0$ pentru $a \neq 0$

Axioma 6) conduce la proprietatea

(III) $||X; x||^0 = 1$ și $||Y; y||^0 = 1$ implică $\langle X, Y; xy\rangle = 1$.

Din (III) deducem următoarea inegalitate generalizată a triunghiului

(III') $||X; x||^0 = 1$ și $||Y; y||^0 = 1$ implică $||X + Y; x + y||^0 = 1$.

În adevăr, din $||X; x||^0 = 1$ și $||Y; y||^0 = 1$ obținem că $\langle X, X; x^2\rangle = 1$ și $\langle X, Y; xy\rangle = 1$ care implică $\langle X+Y, X; x^2+xy\rangle = 1$ și $\langle X+Y, Y; xy + y^2\rangle = 1$. De asemenea obținem că $\langle X + Y, X+Y; x^2+2xy+y^2\rangle = ||X + Y; x+y||^0 = 1$.

Evident că aceste rezultate permit să înzestrăm pe L cu o structură de spațiu normat probabilist $(L, ||.;.||^0)$ unde $||.;.||^0$ este o normă probabilistă particulară care verifică axiomele (I), (II) și (III'). Orice normă probabilistă în sensul utilizat pînă acum satisface axiomele normei $||.;.||^0$.

Dacă $\mathcal{F}(X, Y) = F_{XY}(.) = ||X-Y;.||^0$ atunci $(L, \mathcal{F})$ este un PM-spațiu căci $F_{XY}(x) = 1$ pentru orice $x > 0$ implică $||X-Y; x||^0 = H_0(x)$ deci $X-Y = \theta$ și $X = Y$ implică $||X - Y;.||^0 = H_0(.)$ adică $F_{XY}(x) = 1$ pentru orice $x > 0$. Pe de altă parte $F_{XY}(0) = ||X-Y; 0||^0 = 0$ iar $F_{XY}(.) = ||X-Y;.||^0 = ||-X + Y;.|^0 = F_{XY}$. Axioma triunghiului rezultă din observația că $F_{XY}(x) = ||X-Y; x||^0 = 1$ și $F_{YZ}(y) = ||Y-Z; y||^0 = 1$ implică $||(X-Y) + (Y-Z); x+y||^0 = ||X-Z; x+y||^0 = F_{XZ}(x+y) = 1$.

Întărind axiomele 5) și 6) din definiția 3.4.4. obținem

Definiția 3.4.4. Se numește *spațiu Menger cu produs interior* orice spațiu cu produs interior probabilist în care avem

5') $\langle X + Y, Z; x + y\rangle \geqslant \text{Min } \{\langle X, Z; x\rangle, \langle Y, Z; y\rangle\}$

și 6') $\langle X, Y; \sqrt{xy}\rangle \geqslant T(\langle X, X; x\rangle, \langle Y, Y; y\rangle)$

verificate universal pentru orice t-normă T.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în loc de 5') se ia axioma:

5'') relația din 5') are loc pentru $xy \geqslant 0$

se spune că avem un *spațiu Menger cu produs interior de tip slab.*

Evident că 5') și 6') implică axiomele 5) și 6) de mai sus însă 5'') nu implică pe 5) de aceea uneori se definește spațiul Menger cu produs interior de tip slab înlocuind pe 5') cu 5) și 5''). În ambele cazuri vom avea

Propoziția 3.4.15. *În orice spațiu Menger cu produs interior avem că*

$$(III'') \qquad ||X+Y;\, x+y||^0 \geqslant T(||X,\, x||^0,\, ||Y;\, y||).$$

Demonstrație. În adevăr, prin calcul deducem

$$||X+Y;\, x+y||^0 = \langle X+Y, X+Y;\, (x+y)^2\rangle \geqslant \text{Min}\ \{\langle X+Y,\, X;\, x^2+xy\rangle, \langle X+Y,\, Y;\, xy+y^2\rangle\} \geqslant \text{Min}\ \{\text{Min}\ (\langle X,\, X;\, x^2\rangle, \langle X,\, Y;\, xy\rangle), \text{Min}\,(\langle X,\, Y;\, xy\rangle, \langle Y,\, Y;\, y^2\rangle)\} \geqslant \text{Min}\ (\text{Min}\ [\langle X,\, X;\, x^2\rangle, T(\langle X,\, Y;\, x^2\rangle, \langle Y,\, Y;\, y^2\rangle)],\ \text{Min}\ [\langle Y,\, Y;\, y^2\rangle, T(\langle X,\, X;\, x^2\rangle, \langle Y,\, Y;\, y^2\rangle)] = = \text{Min}\ \{T(\langle X,\, X;\, x^2\rangle, \langle Y,\, Y;\, y^2\rangle), T(\langle X,\, X;\, x^2\rangle, \langle Y,\, Y;\, y^2\rangle)\} = = T(\langle X,\, X;\, x^2\rangle, \langle Y,\, Y;\, y^2\rangle) = T(||X;\, x||^0,\, ||Y;\, y||^0).$$

Corolar $(L, \mathcal{F})$ *este un spațiu Menger relativ la* T.

Evident că un spațiu Menger cu produs interior este un SNP-spațiu în care axioma triunghiului este dată de relația (III'') cînd se mai numește și spațiu Menger normat.

O modalitate de a genera spații probabiliste cu produs interior este sugerată de spații simplu generate de un spațiu liniar real L cu produs interior $\langle X, Y\rangle$ și o funcție $G \in \mathcal{R}_v^+$, $G \neq H_0$ luînd

$$\mathcal{H}(X, Y) = \begin{cases} G(\sqrt{x}/\sqrt{\langle X, Y\rangle}), & \text{dacă } x > 0,\ \langle X, Y\rangle > 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0,\ \langle X, Y\rangle > 0 \\ H_0(x), & \text{dacă } \langle X, Y\rangle = 0 \\ 1 - \langle -X, Y;\, -x\rangle_d & \text{dacă } \langle (X, Y)\rangle < 0 \end{cases}$$

cînd $(L, \mathcal{H})$ astfel definit se numește *spațiu cu produs interior simplu generat de* $(L, \langle , \rangle)$ *și* G.

Vom avea

Teorema 3.4.19. *Orice spațiu cu produs interior simplu generat de* $(L, \langle , \rangle)$ *și* G *este un spațiu Menger cu produs interior de tip slab, față de orice t-normă* T.

Demonstrație. Din definiția lui $\langle X, Y;\, .\rangle$ rezultă imediat axiomele 1) — 4) și rămîne să verificăm 5), 5'') și 6'). Cum 5') implică pe 5) și 5'') să observăm că 5') are loc pentru $\langle X, Z\rangle = 0$, $\langle Y, Z\rangle = 0$ sau $\langle X, Z\rangle = = -\langle Y, Z\rangle$ deoarece $\langle X, Z\rangle = 0$ și $\langle Y, Z\rangle \geqslant 0$ implică $\langle X+Y, Z;\, x+y\rangle \geqslant \text{Min}\ \{H_0(x), \langle Y, Z;\, y\rangle\}$ iar dacă $\langle Y, Z\rangle < 0$ avem că $1 - \langle -(X+Y), Z;\, -x-y\rangle_d \geqslant H_0(x) = \text{Min}\ \{H_0(x), 1 - \langle -Y, Z;\, -y\rangle_d\}$ și analog se tratează cazul $\langle Y, Z\rangle = 0$. Dacă $0 > \langle X, Z\rangle = -\langle Y, Z\rangle$ atunci avem că $H_0(x+y) \geqslant \langle Y, Z;\, y\rangle = \text{Min}\ (1 - \langle -X, Z;\, -x\rangle_d, \langle Y, Z;\, y\rangle)$.

Scanned with OKEN Scanner

Rămîne să analizăm următoarele 4 cazuri:

A) $\langle X, Z\rangle > 0$ și $\langle Y, Z\rangle > 0$ cînd relația 5') are loc în mod evident pentru x sau $y \leqslant 0$ și ne ocupăm de cazul cînd ambele sînt pozitive. Vom avea că $\sqrt{x+y}/\sqrt{\langle X+Y,\ Z\rangle} \geqslant \text{Min}\ (\sqrt{x}/\sqrt{\langle X,\ Z\rangle},\ \sqrt{y}/\sqrt{\langle Y,\ Z\rangle})$ după cum rezultă din relația (1) din § 1.3.3.

B) Fie $\langle X,\ Z\rangle < 0$ și $\langle Y,\ Z\rangle < 0$ cînd 5') este echivalent cu $1-\langle -(X+Y), Z; -x-y\rangle_d \geqslant \text{Min}\ (1-\langle -X, Z; -x\rangle_d,\ 1-\langle -Y, Z; -y\rangle_d)$. În mod analog putem presupune toate argumentele pozitive, adică $x<0$, $y<0$, pentru că dacă $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ partea stîngă este 1 iar în cazul $x \geqslant 0$, $y<0$ partea dreaptă devine $1-\langle -Y,\ Z;\ -y\rangle_d$. În acest caz avem că $-(x+y) < -y$ și $-(x+y)/|\langle X+Y, Z\rangle| < -y/|\langle Y,\ Z\rangle|$ pentru că $\langle -(X+Y),\ Z;\ -x-y\rangle < \langle -Y,\ Z;\ -y\rangle$.

Să ne ocupăm deci de cazul $x<0$, $y<0$ și să arătăm că

$$1-G_d\left(\frac{\sqrt{-x-y}}{\sqrt{|\langle X+Y,\ Z\rangle|}}\right) \geqslant \text{Min}\ 1-G_d\left(\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{|\langle X, Z\rangle|}}\right),\quad 1-G_d\left(\frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{|\langle Y, Z\rangle|}}\right)$$

care, din cauză că $\text{Min}\ \{1-a,\ 1-b\} = 1-\text{Max}\ \{a,\ b\}$, este echivalentă cu

$$\text{Max}\ \{\sqrt{-x}/\sqrt{|\langle X, Z\rangle|},\ \sqrt{-y}/\sqrt{|\langle Y, Z\rangle|}\} \geqslant \sqrt{-(y+x)}/\sqrt{|\langle X+Y, Z\rangle|}$$

care rezultă imediat din relația (1) §1.3.3.

C) În cazul $\langle X, Z\rangle > 0$, $\langle Y, Z\rangle < 0$ și $\langle X+Y, Z\rangle > 0$ avem evident că $\langle X+Y, Z\rangle < \langle X,\ Z\rangle$ și $\langle X, Z\rangle > |\langle Y, Z\rangle|$ și vom demonstra că 5'') are loc ceea ce este echivalent cu a arăta că

$$\langle X+Y, Z;\ x+y\rangle \geqslant \text{Min}\ \{\langle X, Z;\ x\rangle,\ 1-\langle Y, Z;\ -y\rangle_d\}.$$

Pentru $x,\ y \leqslant 0$ avînd că ambele părți ale inegalității sînt nule iar în cazul $x,\ y \geqslant 0$ avînd că $1-\langle -Y, Z; -y\rangle_d = 1$ și $\sqrt{x+y}/\sqrt{\langle X+Y, Z\rangle} \geqslant x/\sqrt{\langle X, Z\rangle}$ rezultă că 5'') are loc.

Rămîne să demonstrăm axioma 5) pentru $xy<0$ căci pentru $xy \geqslant 0$ 5') implică 5). Să arătăm că $\langle X, Z;\ x\rangle = 1$ și $1-\langle -Y, Z; -y\rangle_d = 1$ implică $\langle X+Y, Z;\ x+y\rangle = 1$. Să observăm că $\langle X, Z;\ x\rangle = 1$ implică $x>0$ și deducem că $y/\langle Y, Z\rangle < x/\langle X, Z\rangle$ iar $x+y>0$ căci dacă $|y|>x$ am avea $y/\langle Y, Z\rangle = |y|/|\langle Y, Z\rangle| > x/\langle X, Z\rangle$ care conduce la o contradicție. Cum $\langle Y,\ Z\rangle < 0$ și $y\langle X,\ Z\rangle > x\langle Y,\ Z\rangle$ adunînd în ambii membri pe $x\langle X,\ Z\rangle$ obținem $(x+y)\langle X,\ Z\rangle > x\langle X+Y,\ Z\rangle$ și deci $(x+y)/\langle X+Y,\ Z\rangle > x/\langle X,\ Z\rangle$ adică $G(\sqrt{x+y}/\sqrt{\langle X+Y, Z\rangle}) = 1$.

D) În ultimul caz posibil: $\langle X, Z\rangle > 0$, $\langle Y, Z\rangle < 0$ și $\langle X+Y,\ Z\rangle < 0$ se deduce ușor că pentru $xy \geqslant 0$ avem $1-\langle -(X+Y),\ Z;\ -x-y\rangle_d \geqslant \text{Min}\ \{\langle X, Z;\ x\rangle,\ 1-\langle -Y, Z; -y\rangle_d\}$ deoarece pentru $x,\ y \geqslant 0$ partea stîngă este 1 iar pentru $x,\ y \leqslant 0$ avem $\langle X, Z;\ x\rangle = 0$ ceea ce justifică axioma 5'').

Pentru a justifica axioma 5) trebuie să arătăm că $\langle Y, Z;\ x\rangle = 1$ și $1-\langle -Y,\ Z;\ -y\rangle_d = 1$ implică $1-\langle -(X+Y),\ Z;\ -x-y\rangle_d = 1$. Din ipoteză rezultă că $x>0$ așa că noi putem lua $y<0$. Dacă $-(x+y)<0$ axioma este evidentă iar pentru $y<0$ și $-(x+y)>0$ trebuie să arătăm că $(x+y)/\langle X+Y,\ Z\rangle < y/\langle Y, Z\rangle$. Din $G(\sqrt{x}/\sqrt{\langle X, Z\rangle})=1$ și $G(\sqrt{-y}/\sqrt{\langle Y, Z\rangle})=0$ obținem că $y/\langle Y, Z\rangle < x/\langle X, Z\rangle$. Cum $\langle Y, Z\rangle$ și $\langle X+Y, Z\rangle < 0$, rezultă că $y\langle X, Z\rangle < x\langle Y, Z\rangle$ la care adăugînd în ambii membri pe $y\langle Y, Z\rangle$ obținem că $(x+y)\langle Y, Z\rangle < y\langle X+Y,\ Z\rangle$ adică $(x+y)/\langle X+Y, Z\rangle < y/\langle Y, Z\rangle$ ceea ce trebuie arătat pentru a încheia cazul D).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a încheia demonstrația teoremei trebuie să arătăm că 6') are loc. În acest scop să presupunem $x, y \geqslant 0$ și să observăm că dacă $\langle X, Y\rangle < 0$, atunci $\langle X, Y: \sqrt{xy}\rangle = 1 - \langle -X, Y; -\sqrt{xy}\rangle_d = 1$ pentru că $\sqrt{xy} > 0$. Dacă $\langle X, Y\rangle = 0$ avem că $\langle X, Y; x\rangle = H_0(x)$ iar dacă $\langle X, Y\rangle > 0$ trebuie să arătăm că $\sqrt{xy}/\langle X, Y\rangle \geqslant \text{Min}\,(x/\langle X, X\rangle,\ y/\langle Y, Y\rangle)$. Cum din inegalitatea lui Schwarz avem că

$$\frac{\sqrt{xy}}{\langle X, Y\rangle} \geqslant \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\langle X, X\rangle}} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\langle Y, Y\rangle}} \geqslant \text{Min}\,\{x/\langle X, X\rangle,\ y/\langle Y, Y\rangle\}$$

această justifică 6') și teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *Orice spațiu cu produs interior simplu generat este un spațiu cu produs interior probabilist.*

Corolarul 2. *Dacă* $G(x) = H_a(x)$, $a > 0$, *atunci spațiul cu produs interior simplu generat de* $(L, \langle .; . \rangle)$ *și* G *este un spațiu Menger cu produs interior relativ la orice t-normă* T. *Dacă* $a = 1$ *acesta se reduce la spațiul cu produs interior generator* $(L, \langle .; . \rangle)$.

4.4. SPAȚII LOCAL CONVEXE PROBABILISTE ȘI APLICAȚII LA STUDIUL APLICAȚIILOR LINIARE

Vom prezenta noțiunea de spațiu local convex probabilist (LCP-spațiu) introdusă în [124] însă pe două căi constructive definite în [218] și [26] care permit studiul convergenței uniforme pe familii de aplicații liniare pe SNP-spații și al unor condiții de metrizabilitate sau de completitudine pentru topologiile corespunzătoare.

În mod natural o aplicație $\mathcal{F}: L \to \mathcal{R}_v^+$, notată prin $\mathcal{F}(X) = F_X$, de tipul celei din definiția 3.4.1 pentru care însă în axioma 1) nu cerem decît ca pentru $X = \theta$ să avem $F_X = H_0$ dacă $\mathcal{F}$ ia valori în $\mathcal{R}_v^+$ sau $F_X = H^0$ dacă $\mathcal{F}$ ia valori în $\mathcal{Q}$ se va numi *seminormă probabilistă*. Dacă pe L s-a definit o familie $\{\mathcal{F}^{(i)}\}_{i \in I}$ de seminorme probabiliste cu proprietatea că $X = \theta$ implică $F_X^{(i)} = H_0$ pentru orice $i \in I$ spunem că pe L avem o *structură de LCP-spațiu*. Evident că sistemul format din intersecții finite de mulțimi de forma $V^{(i)}(\varepsilon, \lambda) = \{X \in L: F_X^{(i)}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$, $\lambda \in (0, 1)$ definește un sistem fundamental de vecinătăți ale lui θ a cărui topologie o notăm cu $\sigma(I, \varepsilon, \lambda)$. Vom avea că un șir generalizat converge la zero în $\sigma(I, \varepsilon, \lambda)$ dacă și numai dacă acest șir converge la zero în fiecare dintre (ε, λ)-topologiile generate de seminormele probabiliste $\mathcal{F}^{(i)}$ și $\sigma(I, \varepsilon, \lambda)$ este separată dacă și numai dacă relația $F_X^{(i)} = H_0$, pentru orice $i \in I$, este echivalentă cu $X = \theta$. De asemenea vom avea [221]

Teorema 3.4.20. *Fie* L *separat și* card $(I) \leqslant \aleph_0$, *atunci* $\sigma(I, \varepsilon, \lambda)$-*topologia coincide cu* (ε, λ)-*topologia de spațiu normat aleator.*

Evident că această teoremă oferă o nouă cale de justificare a afirmației că orice spațiu numărabil normat este un SNP-spațiu.

Fie $(L', \mathcal{F}, T)$ un spațiu normat aleator în sensul precizat în §4.2.3 și L un spațiu liniar topologic iar $f: L \to L'$ o aplicație liniară și mărginită în sensul că transformă orice mulțime mărginită $A \subseteq L$ într-o mulțime mărginită $B \subseteq L'$.

Vom avea

Propoziția 3.4.16. *Fie* $\nu_f^A(x) = \sup_{t < X} \inf_{X \in A} F_{f(X)}(t)$, *atunci avem*

1) $\nu_f^A \in \mathcal{R}_v^+$,
2) $\nu_f^A \leqslant F_{f(X)}$ *oricare ar fi* $X \in A$,

Scanned with OKEN Scanner

3) $B \subseteq A$ *implică* $\nu_f^A \leqslant \nu_f^B$

4) $f = 0$ *implică* $\nu_f^A = H_0$,

5) *Dacă* $\{A_i\}_{i \in I}$ *este o familie de mulțimi mărginite care generează pe* L, *atunci* $\nu_f^{A_i} = H_0$, *oricare ar fi* $i \in I$, *implică* $f = 0$.

Teorema 3.4.21. *Fie* $\mathcal{A}$ *o familie de mulțimi mărginite din* L, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(L, L')$ *familia aplicațiilor liniare și mărginite de la* L *la* L' *și fie* $\mathcal{T}^A(f) = \nu_f^A$. *Atunci vom avea*

1) F^A *este o seminormă probabilistă pe* $\mathcal{L}$,

2) $(\mathcal{L}, \mathcal{T}^A, T)_{A \in \mathcal{A}}$ *este un spațiu local convex probabilist,*

3) *dacă* $\mathcal{A}$ *generează pe* L *atunci* $\mathcal{L}$ *este separat,*

4) *dacă un șir* $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}$ *converge punctual la zero și uniform pe fiecare* $A \in \mathcal{A}$ *atunci* $\{f_n\}$ *converge la zero în* $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{A}, \varepsilon, \lambda))$

5) *dacă* $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}$ *converge la zero în* $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{A}, \varepsilon, \lambda))$ *și* $\mathcal{A}$ *generează pe* L *atunci* $\{f_n\}$ *converge la zero punctual și uniform pe fiecare* $A \in \mathcal{A}$.

Se pot defini seminorme pe $\mathcal{L}$ [26] considerînd mulțimea $\mathcal{M}$ a aplicațiilor $m: \mathcal{R}_v^+ \to \mathcal{R}_v^+$ care verifică relațiile

a) $m(H_0) = H_0$,

b) $F_1 \leqslant F_2$ implică $m(F_1) \leqslant m(F_2)$,

c) m este slab continuă în H_0 adică $F_n \xrightarrow{slab} H_0$ implică $m(F_n) \xrightarrow{slab} H_0$. Fie $(L, \mathcal{F}, \mu)$ și $(L', \mathcal{F}', \mu')$ SNP-spații și $f: L \to L'$, atunci vom nota prin $\mathcal{M}_f = \{m \in \mathcal{M}: m(F_X) \leqslant F_{f(X)}$ pentru orice $X \in L\}$, $\sigma_F = \{X \in L: F_X \geqslant F$, $F \in \mathcal{R}_v^+$ fixat$\}$ și $\nu_f(F) = \inf_{x \in \sigma_F} F_{f(X)}$.

Am văzut în § 4.2.3 că dacă f este liniară și continuă, ν_f este slab continuă în H_0 și $\nu_f(F_X) \subseteq F_{f(X)}$. Cum a) și b) sînt evident verificate rezultă că $\nu_f \in \mathcal{M}_f$ și deci $\mathcal{M}_f \neq \emptyset$. În plus vom avea

Teorema 3.4.22. *Fie* $f \in \mathcal{L}^c(L, L')$ *(mulțimea aplicațiilor liniare și continue de la* L *la* L'*) și* $F \in \mathcal{R}_v^+$, *atunci aplicația* $\mathcal{T}_F: \mathcal{L}^c \to \mathcal{R}_v^+$ *definită prin* $\mathcal{T}_F(f) = m_f(F) = \sup\{m(F): m \in m_f\}$ *este o seminormă probabilistă pe* $\mathcal{L}^c$ *relativ la* μ' *iar* (ε, λ)*-topologia definită de* $\mathcal{T}_F$ *este echivalentă cu topologia convergenței uniforme pe* σ_F.

Teorema 3.4.23. *Vom avea că*

a) *pentru orice* $X \in L$, $m_f(F_X) = \nu_f(F_X)$ *unde* ν_f *a fost definit mai sus,*

b) $m_f(F) = \inf_{x \in \sigma_F} \nu_f(F_X)$ *pentru fiecare* $F \in \mathcal{R}_v^+$,

c) $m_f(F) = \nu_f(F)$ *pentru fiecare* $F \in \mathcal{R}_v^+$.

În încheiere menționăm o aplicație a funcției lui Kuratowski $\alpha_\sigma(.)$ [21] la definirea unei clase de seminorme pe $\mathcal{L}^c$ și anume se introduce $\eta_f = \{m \in \mathcal{M}: m(\alpha_\sigma) \leqslant \alpha_{f(\sigma)}$ pentru fiecare mulțime mărginită σ din L și $f \in \mathcal{L}\}$. Cum $\mathcal{M}_f \subseteq \eta_f$ rezultă că $\eta_f \neq \emptyset$ și pentru $F \in \mathcal{R}_v^+$ dacă definim $\alpha_f(F) = \sup\{m(F), m \in \eta_f\}$, obținem că $\alpha_f(F)$ este o seminormă probabilistă pe $\mathcal{L}^c$ pentru fiecare $F \in \mathcal{R}_v^+$. Această nouă seminormă probabilistă este utilă pentru studiul aplicațiilor liniare total mărginite în spații liniare topologice metrizabile.

4.5. ALGEBRE NORMATE PROBABILISTE

Vom prezenta unele rezultate [165] privind utilizarea algebrelor normate probabiliste în teoria algebrelor de operatori.

O lege de compoziție π definită în $\mathcal{Q}$, asociativă și comutativă, se numește *lege multiplicativă* dacă posedă proprietățile:

a) $\pi(H^0, U) = H^0$ pentru orice $U \in \mathcal{Q}$,

Scanned with OKEN Scanner

b) pentru orice $U \in \mathcal{G}$ aplicația $\pi(., U): \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ este nedescrescătoare relativ la ordinea din $\mathcal{G}$,

c) există în $\mathcal{G}$ un element neutru U^0 relativ la π.

De exemplu, dacă T este o t-conormă, atunci

$$\pi_T(U, V; x) = \inf_{0<q<\infty} T(U(x/q), V(q))$$

este o lege de compoziție multiplicativă cu elementul neutru $U^0(U^0(x) = H_1^0(x))$.

Vom avea

Definiția 3.4.5. O algebră $\mathcal{A}$ se numește *algebră normată probabilistă* (NP-algebră) cu legile de compoziție μ și π, dacă este dată o aplicație $||.,.||: \mathcal{A} \to \mathcal{G}$ astfel încît să avem

1) $\mathcal{A}$ este un SNP-spațiu cu funcția triunghiulară μ,

2) pentru orice $X, Y \in \mathcal{A}$ avem $||XY; .|| \leqslant \pi(||X; .||, ||Y; .||; .)$ unde π este o lege de compoziție multiplicativă,

3) dacă în $\mathcal{A}$ există un element unitate E atunci $||E; .||$ este element neutru relativ la π.

Un astfel de exemplu îl oferă algebra variabilelor aleatoare $X: (\Omega, \mathcal{K}, P) \to \mathbf{R}$ cu norma probabilistă $||X; x|| = P(X \geqslant x)$ și legile de compoziție μ_1 și π_1 dată prin $\pi_1(U, V; x) = \inf_{0<q<\infty} \min U(x/2) + V(q), 1)$.

Un alt exemplu se poate construi cu ajutorul unui factor $\mathbf{M}$ în cazul unui spațiu Hilbert complex separabil $\mathbf{H}$, în care folosind notațiile din § 4.2.3, $\mathbf{u}(\mathbf{M})$ va fi mulțimea operatorilor liniari închiși cu domeniul de definiție Dom(.) dens, asociată factorului $\mathbf{M}$. Dacă $\mathbf{M}$ este de clasă finită se știe [187, Th. XV] că pentru orice $A, B \in \mathbf{u}(\mathbf{M})$, Dom $(A) \cap$ Dom (B) și $\{f \in D(A): Af \in$ Dom $(B)\}$ sînt peste tot dense ($D(.)$ este dimensiunea relativă) ceea ce asigură înzestrarea lui $\mathbf{u}(\mathbf{M})$ cu o structură de algebră.

Fie $\mathbf{M}$ de tip II_1 atunci pentru orice $U \in \mathcal{G}$ se pot găsi $A \in \mathbf{u}(\mathbf{M})$ astfel ca $||A; x|| = D(E - E_x^{\hat{A}}) = U(x)$, $E_x^{\hat{A}}$ fiind o descompunere continuă la stînga a unității pentru $\hat{A} = (A^*A)^{1/2}$.

Teorema 3.4.24. *Fie* $\mathbf{M}$ *un factor de clasă finită și* $\mathbf{m}$ *o măsură de probabilitate pe* $\mathbf{M}^p$. *Atunci operația*

$$(1) \qquad A \to ||A; x|| = \mathbf{m}(E - E_x^{\hat{A}}), \quad A \in \mathbf{u}(\mathbf{M})$$

definește în algebra $\mathbf{u}(\mathbf{M})$ *o structură de* NP*-algebră cu legile de compoziție* μ_1 *și* π_1 *atunci și numai atunci cînd* $\mathbf{m}$ *reprezintă dimensiunea relativă* ($\mathbf{M}^p$ *fiind mulțimea ortoproiectorilor din* $\mathbf{M}$).

Observații. 1) În factori de clasă finită $\mathbf{M}$ înzestrați cu norma probabilistă (1) avem că $||AB; .|| \leqslant \pi_1(||A; .||, ||B; .||; .)$ pentru orice $A, B \in \mathbf{u}(\mathbf{M})$ numai în cazul cînd $m = D$.

2) Aplicația

$$2) \qquad A \to ||A; x|| = \min \{D(E - E_x^A, 1\}$$

definește în orice factor o structură de NP-algebră cu legile de compoziție μ_1 și π_1.

Propoziția 3.4.17. *Fie* $\mathbf{M}$ *un factor de tip* I *sau* II_1 *înzestrat cu o normă probabilistă de forma* (2), *atunci pentru orice* $U_1, U_2 \in \{\|C; .\|\}_{C \in \mathbf{M}}$ *(dacă* $\mathbf{M}$ *este de tip* II_1, *pentru orice* $U_1, U_2 \in \mathcal{G}$) *și* $x > 0, \varepsilon > 0$, *se pot determina* $A, B_1, B_2 \in \mathbf{M}(A, B_1, B_2 \in \mathbf{u}(\mathbf{M}))$ *astfel că* $||A; .|| = U_1, ||B_1; .|| = ||B_2; .|| = U_2$, $\mu_1(U_1, U_2; x) - ||A + B_1; x|| < \varepsilon$ *și* $\pi_1(U_1, U_2; x) - ||AB_2; x|| < \varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu $\mathbf{M}^u$ mulțimea operatorilor unitari ai factorului $\mathbf{M}$ de tip II_1 vom obține că pentru legile de compoziție μ_1 și π_1 avem reprezentările

$$\mu_1(U_1, U_2; x) = \sup_{T \in \mathbf{M}^u} ||(A^*A)^{1/2} + \mathbf{T}(B^*B)^{1/2}T^*; x||$$

$$\pi_1(U_1, U_2; x) = \sup_{T \in \mathbf{M}^u} ||(A^*A)^{1/2}\,\mathbf{T}(B^*B)^{1/2}T^*; x||$$

unde $A, B \in \mathbf{u}(\mathbf{M})$ și $||A; .|| = U_1(.)$, $||B; .|| = U_2(.)$.

Propoziția 3.4.18. *Dacă NP-algebra $\mathcal{A}$ cu legile de compoziție μ și π satisface condițiile*

a) *familia operatorilor $U \to \mu(U, V)$, $V \in \mathcal{Q}$, de la $\mathcal{Q}$ în $\mathcal{Q}$, este uniform continuă în H^0, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încît $d_L(\mu(U, V), V) \leqslant \varepsilon$ pentru orice $V \in \mathcal{Q}$ dacă $d_L(U, H^0) \leqslant \delta$*

b) *μ și π sînt continue superior, atunci $\mathcal{A}$ poate fi completată păstrînd aceleași legi de compoziție.*

Cu privire la structura algebrică a completatului oricărui factor de tip II, înzestrat cu norma (2), se arată că acesta este o NP-algebră izomorfă cu algebra operatorilor măsurabili relativ la factorul respectiv [252]. De asemenea norma probabilistă (2) permite să se caracterizeze idealele închise în topologia normei probabiliste din algebra operatorilor măsurabili relativ la o algebră von Neumann în spații Hilbert separabile cu proprietatea că $\mathbf{m}(E - E_\lambda^A) < \infty$ pentru orice $\lambda > 0$.

§ 5. IDEI ȘI REZULTATE PRIVIND TEOREME DE PUNCT FIX ÎN ANALIZA PROBABILISTĂ

A. T. Bharucha-Reid în [14] face o sinteză a ideilor și rezultatelor fundamentale din acest domeniu care ne va fi un sprijin deosebit în cele ce urmează alături de alte rezultate și comentarii asupra unor lucrări recente privind existența și unicitatea punctelor fixe pentru aplicații pe diferite structuri probabiliste. În special se concentrează atenția asupra diferitelor clase de operatori aleatori sau de operatori pe structuri probabiliste pentru găsirea unor căi de rezolvare a unor ecuații cu asemenea operatori, a unor soluții la probleme privind valorile proprii și altele.

Conexiunea mai strînsă a modelării probabiliste cu fenomenele studiate, sporirea fidelității reprezentării abstracte și a utilității practice a metodelor și soluțiilor găsite, face ca dezvoltarea teoriei operatorilor aleatori să fie unul dintre dezideratele dar și dintre instrumentele de bază ale analizei probabiliste.

Să amintim că fiind dat un cîmp borelian de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ și $(E, \mathcal{B})$, $(E', \mathcal{B}')$ spații Banach peste același cîmp de scalari, $\mathcal{B}$ și $\mathcal{B}'$ fiind σ-algebrele părților boreliene ale lui E și E' respectiv, putem defini *variabile aleatoare generalizate* sau *variabile aleatoare cu valori în E* ca fiind orice aplicație $x\colon \Omega \to E$, $\mathcal{K}$-măsurabilă.

Să considerăm că T este un operator definit pe E și cu valori în E' și al cărui domeniu de definiție $D(T)$ în general depinde de ω. Aplicația $T\colon \Omega \times D(T) \to E$ se numește *operator aleator* dacă $y(\omega) = T(\omega)x$ este o variabilă aleatoare cu valori în E' pentru fiecare $x \in D(T) \subseteq E$. Spunem că *operatorul aleator $T(\omega)$ este liniar* pe E dacă $T(\omega)[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha T(\omega)\, x_1 + \beta T(\omega) x_2$ a.s. pentru orice $x_1, x_2 \in D(T)$ și α, β scalari arbitrari iar dacă există o variabilă aleatoare reală nenegativă $M(\omega)$ astfel încît pentru orice $x_1, x_2 \in D(T) = E$ să avem că $||T(\omega)[x_1 - x_2]|| \leqslant M(\omega)\,||x_1 - x_2||$ a.s (care în cazul cînd $T(\omega)$ este liniar se poate scrie sub forma $||T(\omega)x|| \leqslant M(\omega)\|x\|$ a.s) se spune că $T(\omega)$ este *mărginit*.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul spațiilor Hilbert H se pot defini operatori aleatori prin aplicațiile $T\colon \Omega \times H \to H$ cu proprietatea că $(T(\omega)x_1, x_2)$ este o variabilă aleatoare cu valori scalari pentru orice $x_1, x_2 \in H$.

Un operator aleator $T(\omega)$ pe E se numește *continuu în* x_0 dacă $\lim_{n\to\infty} \|T(\omega)x_n - T(\omega)x_0\| = 0$ a.s. cînd $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ și *stocastic continuu* dacă pentru orice $x \in E$ și fiecare $\varepsilon > 0$ avem că $\lim_{\|x-y\|\to 0} P(\{\omega: \|T(\omega)y - T(\omega)x\| > \varepsilon\}) \to 0$.

Operatori aleatori concreți apar, de exemplu, sub forma *matricilor aleatoare* $\mathbf{M} = (m_{ij}(\omega))$ (matrici de tip $n \times n$ ale căror elemente sînt variabile aleatoare, $M\colon \Omega \to L\cdot(\mathbf{R}^n)$ sau $M\colon \Omega \to \mathbf{R}^{n^2}$) sau funcții aleatoare cu valori matrici $M\colon \mathbf{R}_+ \times \Omega \to L\cdot(\mathbf{R}^n)$ și se întîlnesc în statistica matematică, în studiul sistemelor algebrice, al sistemelor de ecuații cu diferențe sau ecuații cu coeficienți aleatori. *Operatori aleatori cu diferențe* sînt utilizați în studiul sistemelor dinamice cu parametrii aleatori discreți, în biologie, în economie sau în inginerie. De exemplu, un astfel de operator în l^2 poate fi definit prin

$$T(\omega)[x_k] = \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)\tau^i[x_k]$$

unde $\tau^i[x_k] = x_{k+i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ iar $a_i(\omega)$ sînt variabile aleatoare reale. Dacă $E = C^{(n)}[a, b]$ este spațiul funcțiilor reale și cu derivate continue pînă la ordinul n pe $[a, b]$ *operatorul aleator diferențial ordinar* este dat prin

$$T(\omega)[x(t)] = \sum_{k=0}^{n} a_k(\omega)\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}, \quad t \in [a, b]$$

unde $a_k(\omega)$ sînt variabile aleatoare reale sau chiar funcții aleatoare $a_k(t, \omega)$, $t \in [a, b]$ și care reprezintă una dintre cele mai studiate și aplicate clase de operatori aleatori.

De asemenea *operatorii de tip Schrödinger de forma*

$$S(\omega)[u] = \frac{h^2}{2m^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V(\omega)u$$

unde $V(\omega)$ este un potențial aleator sau *operatorii aleatori ai difuziei* de forma

$$D(\omega)[u] = a(x, \omega)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, \omega)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, \omega)u$$

definesc clase de operatori aleatori cu derivate parțiale cu aplicații importante. Una dintre problemele importante în teoria probabilistă a operatorilor este determinarea condițiilor în care operatorii aleatori cu derivate parțiale de forma de mai sus definesc generatorii infinitezimali ai semigrupurilor de operatori aleatori.

Operatorii *aleatori de tip Helmholtz de forma* $\Delta u + k^2 n^2(r, \omega)u = 0$ unde n^2 este indicele de refracție, presupus ca și funcție aleatoare, apar în studiul propagării undelor în medii aleatoare.

O clasă de operatori care a fost mult studiată [13], [284] este clasa operatorilor aleatori integrali dintre care operatorii aleatori liniari de tip Fredholm sau Volterra de forma

$$F(\omega)f(x) = \int_a^b K(x, y, \omega)f(y)\,\mathrm{d}y$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$V(\omega)f(x) = \int_a^x K(x, y, \omega)f(y)\,dy$$

sau operatori aleatori neliniari de tip Urîson de forma

$$U(\omega)f(x) = \int_a^b G(x, y, f(y), \omega)\,dy$$

De multe ori domeniul pe care este definită integrala este o mulțime aleatoare.

Existența unui punct fix ($x \in D(T)$ pentru care $T(x) = x$) are importanță în stabilirea existenței și unicității soluțiilor unor ecuații cu operatori. Este suficient să amintim utilizarea principiului contracției al lui Banach la studiul existenței și unicității soluțiilor unei ecuații integrale aleatoare de tip Fredholm sau Volterra [284], la rezolvarea ecuației integrale a lui Itô [13], [37] sau în studiul soluțiilor ecuației integrale aleatoare neliniare [13]. De asemenea, merită menționată utilizarea în analiza probabilistă [13], [284], la studiul existenței soluțiilor ecuației integrale aleatoare, a teoremelor de punct fix ale lui Schauder [14] sau Krasnoselski [14]. Desigur că tehnica folosită pentru rezolvarea ecuațiilor cu operatori aleatori este mult mai dificilă [13] și necesită noi rezultate privind existența, unicitatea și măsurabilitatea soluțiilor.

Pentru fixarea terminologiei să amintim [14] că o ecuație aleatoare $T(\omega)\,x(\omega) = y(\omega)$ într-un spațiu Banach E are o *soluție* aleatoare atunci cînd există o variabilă aleatoare $x(\omega)$ cu valori în E care satisface condiția $P(\{\omega\colon T(\omega)x(\omega) = y(\omega)\}) = 1$. O variabilă aleatoare $x(\omega)$ cu valori în E se numește *punct fix al operatorului aleator* $T(\omega)$ dacă $T(\omega)x(\omega) = x(\omega)$a.s.

Studiul teoriei punctelor fixe pentru operatori aleatori a fost inițiat de Špaček [276] și Hans [92]. O primă generalizare a teoremei de punct fix a lui Banach pentru operatori aleatori de contracție a fost dat de Hans [92] care prin *operator aleator de contracție* înțelege orice operator aleator $T(\omega)$ pe spațiul Banach E cu domeniul de definiția $D(T(\omega))$ pentru care există o variabilă aleatoare reală nenegativă $k(\omega) < 1$ a.s astfel încît să avem că $\|T(\omega)x_1 - T(\omega)x_2\| \leqslant k(\omega)\|x_1 - x_2\|$ a.s. pentru orice $x_1, x_2 \in D(T(\omega))$. Dacă $k(\omega) = k =$ constant pentru orice $\omega \in \Omega$ se zice că $T(\omega)$ este o *contracție aleatoare uniformă* și avem

Teorema 3.5.1. *Fie E un spațiu Banach separabil și $T(\omega)\colon E \to E$ un operator aleator continuu și proprietatea că*

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{x_1\in E}\bigcap_{x_2\in E}\left\{\omega\colon \|T^n(\omega)x_1 - T^n(\omega)x_2\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{m}\right)\|x_1 - x_2\|\right\}\right) = 1$$

unde pentru fiecare $\omega \in \Omega$, $x \in E$ și $n = 1, 2, \ldots$ avem că $T^1(\omega)x = T(\omega)x$ și $T^{n+1}(\omega)x = T(\omega)[T^n(\omega)x]$, atunci $T(\omega)$ are un punct fix unic $y(\omega)$.

Demonstrație. Fie $M = \left\{\omega \in \Omega\colon \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{x_1\in E}\bigcap_{x_2\in E}\left\{\omega\colon \|T^n(\omega)x_1 - T^n(\omega)x_2\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{m}\right)\|x_1 - x_2\|\right\}\right\}$ pentru care $T(\omega)$ este continuu. Evident că $M \in \mathcal{K}$ și prin ipoteză $P(M) = 1$. Fie $y(\omega)\colon \Omega \to E$ definită pentru fiecare $\omega \in M$ ca fiind egală cu punctul fix al operatorului $T(\omega)$ iar pentru $\omega \in \Omega - M$ prin $y(\omega) = \theta =$ vectorul nul din E, atunci $T(\omega)y(\omega) = y(\omega)$ a.s.

Pentru stabilirea măsurabilității punctului fix $y(\omega)$ vom considera $x_0(\omega)$ o variabilă aleatoare arbitrară cu valori în E și vom nota prin $x_1(\omega) = T(\omega)x_0(\omega)$, atunci $x_1(\omega)$ este o variabilă aleatoare cu valori în E [13, Th. 2.14] și în mod analog $x_n(\omega) = T(\omega)x_{n-1}(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$. Din continuitatea lui $T(\omega)$ rezultă că șirul $x_n(\omega)$ converge a.s către $y(\omega)$ și deci $y(\omega)$ este o variabilă aleatoare cu valori în E ([13, Th. 1.6]).

Unicitatea punctului fix $y(\omega)$ rezultă din unicitatea lui $y(\omega)$ pentru fiecare $\omega \in \Omega$ ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Teorema de mai sus poate fi generalizată astfel:

Teorema 3.5.2. *Fie E un spațiu Banach separabil și $T(\omega)\colon E \to E$ un operator aleator continuu pe E. Dacă există o variabilă aleatoare reală și nenegativă $k(\omega)$, $k(\omega) < 1$ a.s și pentru orice x_1, $x_2 \in E$ avem că $||T(\omega)x_1 - T(\omega)x_2|| \leqslant k(\omega)||x_1 - x_2||$ atunci există o variabilă aleatoare $y(\omega)$ cu valori în E care este un punct fix unic pentru $T(\omega)$.*

Demonstrație. Fie $M = \{\omega\colon k(\omega) < 1\}$, $M' = \{\omega\colon T(\omega)x$ este continuu în $x\}$ și $G_{x_1, x_2} = \{\omega\colon ||T(\omega)x_1 - T(\omega)x_2|| \leqslant k(\omega)||x_1 - x_2||\}$. Din proprietatea de separabilitate a lui E rezultă că intersecțiile din expresia $\bigcap_{x_1 \in E} \bigcap_{x_2 \in E} (G_{x_1, x_2} \cap M \cap M')$ se pot înlocui cu intersecții după o mulțime numărabilă densă în E și condițiile teoremei 3.5.1 sînt îndeplinite pentru $n = 1$.

Amintim că teoreme de tipul de mai sus au fost folosite pentru stabilirea existenței, unicității și măsurabilității soluțiilor ecuațiilor cu operatori aleatori integrali [11], [12], [13], [32], pentru ecuații diferențiale cu condiții aleatoare la frontieră [32], în studiul procedeelor de aproximare stocastică [86], [93], [292], în obținerea unor algoritmi de identificare a unui sistem liniar aleator cu timp discret descris de o ecuație aleatoare cu diferențe [209].

Alte rezultate privind existența punctelor fixe pentru contracții aleatoare și aplicații au fost date în [88], [258], [62], [95].

Se știe că în cazul spațiilor metrice complete s-au obținut rezultate interesante privind și problema inversă de caracterizare a operatorilor T care pentru fiecare $x \in E$, $T^n x \to x_0 =$ punct fix unic pentru T, în sensul că un astfel de operator definit pe un spațiu abstract E implică existența unei metrici d pe E astfel că pentru fiecare $k \in (0, 1)$ să avem că T este un operator de contracție cu constanta de contracție k [10].

Cu privire la utilizarea contracțiilor aleatoare pentru stabilirea soluțiilor problemei valorilor proprii aleatoare de forma $(T(\omega) - \lambda I)x = y(\omega)$ avem

Teorema 3.5.3. *Fie $T(\omega)$ o contracție aleatoare pe un spațiu Banach separabil E și $k(\omega)$ o variabilă aleatoare reală nenegativă pentru care $k(\omega) < 1$ a.s, atunci pentru orice număr real $\lambda \neq 0$ cu proprietatea că $k(\omega) < |\lambda|$ a.s. există un operator aleator $S(\omega)$ care coincide cu $(T(\omega) - \lambda I)^{-1}$.*

Demonstrație. Din ipoteza că $\lambda \neq 0$ rezultă că $T(\omega) - \lambda I$ este invertibil în același timp cu operatorul aleator $(1/\lambda)T(\omega) - I$. Cum pentru fiecare $y \in E$ operatorul aleator $T_y(\omega)$ definit prin $T_y(\omega)[x] = (1/\lambda)T(\omega)x - y$ pentru fiecare $\omega \in \Omega$ și $x \in E$ este o contracție aleatoare, din teorema 3.5.2 rezultă că există un punct fix aleator unic $u_y(\omega)$ care satisface relația $u_y(\omega) = 1/\lambda T(\omega)u_y(\omega) - y$ a.s. Această afirmație fiind echivalentă cu invertibilitatea operatorului aleator $(1/\lambda)T(\omega) - I$ rezultă invertibilitatea operatorului aleator $T(\omega) - \lambda I$.

O versiune probabilistă a teoremei lui Schauder de punct fix a fost dată de A. Mukherjea [182], [183] prin

Teorema 3.5.4. *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp borelian atomic de probabilitate iar M o mulțime compactă (sau închisă și mărginită) și convexă a unui*

Scanned with OKEN Scanner

spațiu Banach separabil E. Fie $T(\omega)\colon M \to M$ *un operator aleator compact, atunci există o variabilă aleatoare* $y(\omega)$ *cu valori în E astfel încît* $T(\omega)y(\omega) = y(\omega)$ *a.s.*

Demonstrație. Se știe [14] că orice variabilă aleatoare $x(\omega)$ cu valori în E definită pe un cîmp de probabilitate atomic are proprietatea că este constantă a.s. pe fiecare atom. Să notăm cu B_n mulțimea atomilor lui Ω și să considerăm că $\{x_i\}$, $i \in \mathbf{N}$ este o mulțime densă în M. Rezultă, din afirmația de mai sus, că $T(\omega)x_i$ pentru fiecare i este o constantă a.s. pe fiecare B_n ceea ce implică faptul că pentru fiecare n se poate determina $C_n \subseteq B_n$ cu proprietatea că $P(B_n - C_n) = 0$ și astfel încît să avem $T(\omega)x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{C_n}(\omega) T(\omega_n)x_i$ pentru fiecare i și $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, $\omega_n \in C_n$.

Oricare ar fi $\omega_1, \omega_2 \in C_n$ și $x \in E$ avem că $T(\omega_1)x = T(\omega_2)x$ căci dacă aceasta n-are loc atunci există un $k > 0$ astfel încît să avem că $\|T(\omega_1)x - T(\omega_2)x\| > k > 0$. Cum $T(\omega)$ este continuu se poate găsi x_i astfel încît $\|T(\omega_1)x_i - T(\omega_2)x_i\| > k/2$ care conduce la o contradicție. Putem scrie deci că

$$T(\omega)x = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{C_n}(\omega) T(\omega_n)x \text{ a.s., pentru fiecare } x \in E.$$

Aplicînd teorema lui Schauder pentru fiecare operator $T(\omega_n)$ rezultă că există cel puțin un punct y_n, pentru fiecare n, astfel încît să avem că $T(\omega_n)y_n = y_n$. Notînd prin $y(\omega) = y_n$ pentru $\omega \in C_n$ și zero în rest, obținem că $T(\omega)y(\omega) = y(\omega)$ și teorema este demonstrată.

Această teoremă a fost extinsă la cazul operatorilor aleatori continui [14, Th. 10] sau stocastic continui iar în altă variantă probabilistă a teoremei lui Schauder se consideră că operatorul aleator $T(\omega)$ satisface ipotezele teoremei lui Schauder pentru fiecare $\omega \in \Omega$.

Teoreme de acest tip au fost utilizate [13], [185] pentru demonstrarea existenței soluțiilor ecuației integrale aleatoare de tip Urîson, în C[0, 1], de forma

$$\int_{I(\omega)} K(t, u, x(u, \omega), \omega)\, du - x(t, \omega) = y(t, \omega)$$

unde $I(\omega) = [a(\omega), b(\omega)] \subseteq [0, 1]$, $a(\omega)$, $b(\omega)$ fiind variabile aleatoare reale. De asemenea s-au găsit aplicații la stabilirea vectorului preț de echilibru aleator [176] în analiza schimbului economic aleator sau în stabilirea existenței soluțiilor ecuațiilor aleatoare diferențiale sau integrale neliniare cu neliniarități monotone [133].

În [212] este dată o versiune probabilistă a teoremei de punct fix a lui Krasnoselski care impune aceleași condiții spațiului $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, mulțimii M și spațiului E ca și în teorema 3.5.4 iar $T(\omega)$ și $S(\omega)$ sînt presupuși operatori aleatori continui pe E cu valori în E cu proprietatea că $S(\omega)x_1 + T(\omega)x_2 \in M$ pentru orice $x_1, x_2 \in M$, $\omega \in \Omega$, există o variabilă aleatoare reală, nenegativă $k(\omega) < 1$ a.s. și $\|S(\omega)x_1 - S(\omega)x_2\| \leqslant k(\omega)\|x_1 - x_2\|$ pentru orice $x_1, x_2 \in M$ iar $T(\omega)$ este compact pentru fiecare $\omega \in \Omega$. În aceste ipoteze există o variabilă aleatoare cu valori în E cu proprietatea că $S(\omega)y(\omega) + T(\omega)y(\omega) = y(\omega)$ pentru orice $\omega \in \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația este similară celei pentru teorema 3.5.4 și rezultatul se aplică la stabilirea existenței soluției ecuației integrale aleatoare de forma

$$x(t, \omega) = \int_0^t K_1(t, u, x(u, \omega), \omega)\, du + \int_0^T K_2(t, u, x(u, \omega), \omega)\, du + y(t, \omega),$$

unde $t \in [0, T]$.

Alte teoreme de punct fix [184] cu caracter probabilist sînt bazate pe un concept de rezolventă analog conceptului clasic de rezolventă a nucleului din teoria ecuațiilor integrale.

Cu privire la diferite probleme deschise, împărtășind părerea lui A. T. Bharucha-Reid [14], se întrevede că orice rezultat care ar reuși să generalizeze sub formă probabilistă teoremele privitoare la operatorii neexpansivi sau condensatori, teoreme de punct fix de tip Kakutani sau cele privitoare la contracții neliniare, vor avea aplicații importante în analiza probabilistă.

Problema conexiunilor dintre valoarea medie în sens Bochner pentru punctul fix probabilist și punctul fix al operatorului determinist obținut prin procesul de mediere rămîne încă o problemă deschisă.

Studiul soluțiilor aproximative pentru ecuații cu operatori aleatori și teoreme de tip Bonsall-Nadler [28], [14] privind contracțiile aleatoare, comportarea șirurilor de puncte fixe corespunzătoare șirurilor convergente de operatori aleatori care posedă puncte fixe precum și comportarea asimptotică a operatorilor aleatori și punctelor fixe în sensul problemelor limită centrală, sînt încă într-o fază de început.

Vom trece la comentarea celor mai semnificative rezultate privind existența și unicitatea punctelor fixe pe structuri probabiliste și aplicații ale măsurilor aleatoare de necompacitate în teoria punctelor fixe.

Studiul existenței punctelor fixe pentru aplicații pe PM-spații începe cu teza lui V. M. Sehgal [253] și lucrările lui H. Sherwood [256], [259], din care se desprinde noțiunea de *contracție pe PM-spații* ca fiind orice aplicație $f: (S, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{F})$ pentru care există $k \in (0, 1)$ astfel încît să avem că $F_{f(p)f(q)}(kx) \geq F_{pq}(x)$ pentru orice $p, q \in S$ și $x > 0$, împreună cu rezultatul că orice contracție pe PM-spații are cel mult un punct fix [259] iar în cazul spațiilor Menger cu $T = \text{Min}$ se demonstrează și unicitatea punctului fix pentru f.

O altă demonstrație pentru spații Menger $(S, \mathcal{F}, T)$ cu $T = \text{Min}$ și complete a fost dată de V. M. Sehgal și A. T. Bharucha-Reid [254, Th. 3] iar generalizarea la spații nearhimediene a fost dată în [117, Th. 2.2]. De asemenea în [256] se consideră contracții relative la un generator aditiv al t-normei T, definite prin relația $g \circ F_{f(p)f(q)}(x) \leq kg \circ F_{pq}(x/k)$, $k \in (0, 1)$, $p, q \in S$ și $x \in \mathbf{R}$, pentru care se arată existența și unicitatea punctului fix. Extinderea pentru spații Menger nearhimediene a fost dată în [117, Th. 2.1].

În spații Serstnev complete $(S, \mathcal{F}, \tau)$, cu τ verificînd condiția $\sup \{\tau(F, F): F < H_0\} = H_0$ se definește funcția G_{p_0} [259] prin $G_{p_0}(x) = \inf \{F_{p_0 f^m(p_0)}(x);\ m \in \mathbf{N}\}$, $x \in \mathbf{R}$ și se arată că orice contracție $f: S \to S$ sau are un punct fix unic, sau pentru orice $p_0 \in S$, $\sup_{x \in \mathbf{R}} G_{p_0}(x) < 1$ iar formularea condiției cu ajutorul funcției G_{p_0} nu depinde de punctul $p_0 \in S$ în sensul că pentru o contracție f avem că $\sup_{x \in \mathbf{R}} G_{p_0}(x) = 1$ dacă și numai dacă $\sup_{x \in \mathbf{R}} G_{q_0}(x) = 1$ oricare ar fi $p_0, q_0 \in S$. De asemenea, se demonstrează [259, Th. 3.4] că dacă τ este continuă relativ la șiruri nedescrescătoare iar F verifică condiția că există $x \in \mathbf{R}$ astfel încît $F_{pq}(x) = 1$, $p, q \in S$, orice contracție are un punct fix unic.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul E-spațiilor se poate introduce noțiunea de *contracție strictă* prin aplicația $f: S \to S$ pentru care există $k \in (0, 1)$ astfel încît pentru fiecare $p, q \in S$ și $x \in \mathbf{R}$ să avem $\{t \in \Omega: d(p(t), q(t)) < x/k\} \subseteq \{t \in \Omega: d(f(p(t)), f(q(t))) < x\}$. Orice contracție strictă pe E-spații complete are un punct fix unic [259, Th. 3.7].

Problema consistenței studiului punctelor fixe rezultă din faptul [259 Th.3.5] că există spații Serstnev $(S, \mathcal{F}, \tau)$ (cu τ continuă prin șiruri nedescrescătoare și definită prin sup $\{T(F(ax), F'(bx)), a+b=1\}$ cu t-norma T continuă la stînga) și contracții probabiliste pe S care nu au puncte fixe dacă și numai dacă există $G \in \mathcal{R}_v^+$ și $k \in (0, 1)$ astfel încît sup $\{(\tau_{i=1}^{\infty} G(\varphi/k^{i-1})(x); x \in \mathbf{R}\} < 1$, unde φ este aplicația identică pe $\mathbf{R}$ iar $\tau_{i=1}^{m} F_i$ este dată prin inducție folosind asociativitatea lui τ și convenția $\tau_{i=1}^{\infty} F_i = \lim_{n \to \infty} \tau^n F_i$ a cărei existență rezultă din relația $\tau_{i=1}^{n} F_i \geqslant \tau_{i=1}^{n+1} F_i$.

Ca un corolar al acestui rezultat se obține existența unor contracții fără puncte fixe pe spații Menger complete cu $T = T_m$ sau $T =$ Prod precum și pe spații Serstnev cu τ avînd proprietățile amintite iar T fiind o t-normă arhimediană.

Rezultate privind șiruri de aplicații și puncte fixe pentru contracții pe PM-spații au fost date în [106], [229], unde se demonstrează că dacă pentru fiecare f_n există $p_n \in S$ cu proprietatea că $f_n(p_n) = p_n$ și f_n converge uniform la f care are un punct fix unic p, atunci și $p_n \to p$ dacă $n \to \infty$ iar în cazul cînd f_n converge punctual către f și există un subșir $\{p_{n_k}\}$, convergent către $p \in S$, atunci p este punct fix pentru f. De asemenea sînt date unele rezultate privind existența punctelor fixe pentru aplicații definite pe PM-spații produs și care sînt contracții relativ la fiecare variabilă.

Se definesc [229] perechi contractive de aplicații $f_i: (S, \mathcal{F}, \tau) \to (S, \mathcal{F}, \tau)$, $i = 1, 2$ prin condiția ca să existe $k \in (0, 1)$ astfel încît să avem $F_{f_1(p) f_2(q)}(kx) \geqslant F_{pq}(x)$, $x \in \mathbf{R}$ și se studiază existența punctelor fixe comune $p \in S$, $f_1(p) = f_2(p) = p$. Dacă se definește pentru fiecare punct $p_0 \in S$ șirul iteratelor relativ la perechea (f_1, f_2) prin $p_{2i+1} = f_1(p_{2i})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $p_{2j} = f_2(p_{2j-1})$, $j = 1, 2, \ldots$, atunci cînd sup $(\tau(F, F), F < H_0) = H_0$ avem că sau există punct fix comun pentru perechea (f_1, f_2) sau sup $\{G_{p_0}(x), x \in \mathbf{R}\} < 1$. Ca un corolar rezultă că orice pereche de contracții pe un spațiu Menger $(S, \mathcal{F}, \mathrm{Min})$ are un punct fix comun.

O altă clasă de PM-spații și contracții au fost introduse în [254]prin noțiunea de (ε, λ)-*local contracție* pe un PM-spațiu, ca fiind orice aplicație $f: S \to S$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon, \lambda > 0$ există $k \in (0, 1)$ astfel încît dacă $p \in S$ și $q \in U_p(\varepsilon, \lambda) = \{q \in S: F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$ avem că $F_{f(p)f(q)}(kx) \geqslant F_{pq}(x)$ pentru orice $x > 0$.

Un PM-spațiu $(S, \mathcal{F})$ se numește (ε, λ)-*înlănțuibil* dacă pentru $\varepsilon, \lambda > 0$ fixate și orice $p, q \in S$ există un șir finit $p = p_0, p_1, \ldots, p_n = q$ de elemente din S astfel încît să avem că $p_{i+1} \in U_{p_i}(\varepsilon, \lambda)$ pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Se arată [254, Th. 6] că dacă (S, d) este ε-înlănțuibil în sensul lui Edelstein, atunci spațiul Menger indus $(S, \mathcal{F}_g, \mathrm{Min})$ este (ε, λ)-înlănțuibil $(\mathcal{F}_g = H_{d(p,q)})$.

Teorema 3.5.5. [254] *Fie* $(S, \mathcal{F}, T)$ *un spațiu Menger complet* (ε, λ)-*înlănțuibil cu* $T(x, x) \geqslant x$, $x \in [0, 1]$. *Dacă* $f: S \to S$ *este o* (ε, λ)-*local contracție atunci* f *are un punct fix* $p_0 \in S$ *și* $f^n(p) \to p_0$, *pentru* $n \to \infty$, *oricare ar fi* $p \in S$.

Noi vom da demonstrația rezultatului asemănător obținut în [117, Th. 2.3] pentru cazul cînd $(S, \mathcal{F}, T)$ este un spațiu Menger nearhimedian cu $T = \mathrm{Min}$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta mai întîi că pentru fiecare $p \in S$ și $x > 0$ există $n(p, x)$ astfel încît să avem că $F_{f^m(p)f^{m+1}(q)}(x) > 1 - \lambda$ pentru orice $m > n(p, x)$ folosind un raționament asemănător cu cel din [254].

Fie $p = p_0, p_1, \ldots, p_n = f(p)$ un șir finit cu proprietatea că $F_{p_{i+1}p_i}(\varepsilon) > 1 - \lambda$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Cum f este o (ε, λ)-local contracție rezultă că $F_{f(p_{i+1})f(p_i)}(\varepsilon) \geqslant F_{p_{i+1}p_i}(\varepsilon/k) > 1 - \lambda$ și că șirul de elemente $f(p_0), f(p_1), \ldots, f(p_n)$ este un (ε, λ)-lanț pentru $f(p)$ și $f^2(p)$ și prin inducție se arată că $f^r(p_0), f^r(p_1), \ldots, f^r(p_n)$ este un (ε, λ)-lanț pentru $f^r(p)$ și $f^{r+1}(p)$ pentru fiecare $r \in \mathbf{N}$, deci pentru $x > 0$ și pentru fiecare număr natural r vom avea că $F_{f^r(p_{i+1})f^r(p_i)}(x) \geqslant F_{p_{i+1}p_i}(x/k^r)$ care împreună cu faptul că (S, F, T) este spațiu Menger nearhimedian implică relația

$$F_{f^r(p_0)f^r(p_n)}(x) \geqslant T(F_{p_0p_1}(x/k^r), F_{(p_1p_n}(x/k^r)) \geqslant T(F_{p_0p_1}(x/k^r), T(F_{p_1p_2}(x/k^r), F_{p_2p_n}(x/k^r))).$$

Prin inducție deducem că

$$F_{f^r(p_0)f^r(p_n)}(x) \geqslant T(F_{p_0p_1}(x/k^r), T(F_{p_1p_2}(x/k^r), \ldots, T(F_{p_{n-2}p_{n-1}}(x/k^r), F_{p_{n-1}p_n}(x/k^r))) \ldots)$$

Cum n este un număr natural finit rezultă că există un număr natural m_i astfel încît $F_{p_ip_{i+1}}(x/k^r) > 1 - \lambda$ pentru fiecare $r > m_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Fie $n(p, x) = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}\}$ și atunci avem că $F_{f^r(p)f^{r+1}(p)}(x) > 1 - \lambda$ pentru orice $r \geqslant n(p, x)$.

Fie $p \in S$ și $\varepsilon > 0$, atunci rezultă că există $n(p, \varepsilon)$ astfel încît să avem că $F_{f^n(p)f^{n+1}(p)}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ pentru orice $n \geqslant n(p, \varepsilon) = n_0$. Fie $f^{n_0}(p) = q$, atunci vom avea că $F_{f^n(q)f^{n+1}(q)}(x) > 1 - \lambda$ pentru orice $n \geqslant 0$. Din definiția (ε, λ)-local contracției deducem că pentru orice $x > 0$ putem scrie că $F_{f^n(q)f^{n+1}(q)}(x) \geqslant F_{qf(q)}(x/k^n)$ unde $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Printr-un raționament similar [117] se arată că $\{f^n(q)\}$, deci și $\{f^n(p)\}$ este un șir fundamental în S și deci convergent.

Fie $f^n(p) \to p_0 \in S$ și $U_{f(p_0)}(\varepsilon', \lambda')$ o vecinătate a lui $f(p_0)$. Întrucît există un $m \geqslant 0$ astfel încît $f^n(p) \in U_{p_0}(\varepsilon, \lambda) \cap U_{p_0}(\varepsilon', \lambda')$ pentru orice $n \geqslant m$ obținem că $F_{f^{n+1}(p)f(p_0)}(\varepsilon') \geqslant F_{f^n(p)p_0}(\varepsilon'/k) > 1 - \lambda'$ pentru $n \geqslant m$, adică $f^n(p) \to f(p_0)$ și deci $f(p_0) = p_0$.

Unicitatea punctului fix p_0 rezultă din observația că dacă ar mai exista un $q_0 \in S$, $q_0 \neq p_0$ cu $f(q_0) = q_0$ ar rezulta că există un $x > 0$ astfel că $F_{p_0q_0}(x) = a \in [0, 1)$. Fie $p_0 = p_0, p_1, \ldots, p_m = q_0$ un (ε, λ)-lanț pentru p_0 și q_0, atunci cum pentru orice $r \in \mathbf{N}$ avem că $f^r(p_0), f^r(p_1), \ldots, f^r(p_m)$ este un (ε, λ)-lanț pentru $f^r(p_0)$ și $f^r(q_0)$ rezultă că $a = F_{p_0q_0}(x) = F_{f^r(p_0)f^r(q_0)}(x) > a$ pentru r suficient de mare și deci $p_0 = q_0$.

Corolar. *Fie (S, d) un spațiu metric nearhimedian complet și ε-înlănțuibil iar $f: S \to S$ cu proprietatea că $d(p, q) < \varepsilon$ implică $d(f(p), f(q)) \leqslant kd(p, q)$, $k \in (0, 1)$ și $p, q \in S$, atunci f are un punct fix unic $p_0 \in S$ și $f^n(p) \to p_0$, $n \to \infty$, pentru orice $p \in S$.*

Demonstrația rezultă din observația că spațiul Menger generat este un PM-spațiu nearhimedian complet (ε, λ)-înlănțuibil.

O altă cale de abordare a problemei punctelor fixe este aceea de a introduce o familie de pseudometrici d_α pe $(S, \mathcal{F})$ prin $d_\alpha(p, q) = \sup\{t: F_{pq}(t) \leqslant 1 - \alpha\}$, $\alpha \in (0, 1)$ care se deduce ușor că iau valori finite. Mai mult se arată [39] că

1) d_α este o pseudometrică pentru fiecare $\alpha \in (0, 1)$ și $d_\alpha(p, q) = 0$ pentru orice $\alpha \in (0, 1)$ dacă și numai dacă $p = q$,

Scanned with OKEN Scanner

2) pentru fiecare $p, q \in S$, $d_\alpha(p, q)$ este o funcție de α, continuă la stînga, nedescrescătoare și cu proprietatea că $F_{pq}(d_\alpha(p, q) \leqslant 1-\alpha$,

3) $F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \alpha$ dacă și numai dacă $d_\alpha(p, q) < \varepsilon$.

Familia de pseudometrici $\{d_\alpha\}_{\alpha \in (0, 1)}$ definită mai sus se numește *familia de pseudometrici asociată metricii probabiliste* $\mathcal{F}$ și avem

Teorema 3.5.6. [39] *Topologia pe S generată de familia de pseudometrici asociată metricii probabiliste $\mathcal{F}$ este echivalentă cu topologia indusă de $\mathcal{F}$.*

Această teoremă poate fi adaptată și pentru spațiile Menger nearhimediene, de aceea vom avea

Teorema 3.5.7. *Fie S un spațiu Hausdorff a cărui topologie este generată de o familie de pseudometrici nearhimediene d_α, $\alpha \in (0, 1)$ și cu proprietatea că pentru $p, q \in S$, $d_\alpha(p, q)$ este o funcție necrescătoare, continuă la stînga în raport cu α și $d_\alpha(p, q) = 0$ pentru orice $\alpha \in (0, 1)$ dacă și numai dacă $p = q$, atunci există o metrică nearhimediană probabilistă $\mathcal{F}$ astfel încît $\{d_\alpha\}_{\alpha \in (0, 1)}$ este familia de pseudometrici nearhimediene asociată ei.*

De asemenea avem că dacă S este un spațiu înzestrat cu o uniformitate nearhimediană $\mathcal{D}$, secvențial complet și $f: S \to S$ cu proprietatea că pentru fiecare $d_\alpha \in \mathcal{D}$ există o constantă $k_\alpha \in (0, 1)$ astfel încît să avem că $d_\alpha(f(p), f(q)) \leqslant k_\alpha d_\alpha(p, q)$ pentru orice $p, q \in S$, atunci există un punct unic $r \in S$ astfel încît $f(r) = r$ și $f^n(p) \to r$ cînd $n \to \infty$ oricare ar fi $p \in S$ (d_α fiind o familie de pseudometrici nearhimediene). Aceasta ne permite să demonstrăm analogul probabilist nearhimedian al teoremei 4.1 din [39] adică avem

Teorema 3.5.8. *Fie $(S, \mathcal{F}, \mathrm{Min})$ un spațiu Menger nearhimedian complet, $f : S \to S$ și să presupunem că există un $\delta \in (0, 1)$ astfel încît pentru fiecare $\alpha \in (0, \delta)$ să existe $k_\alpha \in (0, 1)$ și să aibă loc relația $F_{f(p)\, f(q)}(k_\alpha t) \geqslant F_{pq}(t)$ pentru $p, q \in S$ și cu $F_{pq}(t) > 1 - \alpha$, atunci f are un punct fix r și $f^n(p) \to r$, $n \to \infty$, pentru orice $p \in S$.*

Demonstrație. Fie d_α familia pseudometricilor nearhimediene asociate lui $\mathcal{F}$. Dacă pentru $\alpha \in (0, \delta)$, $p, q \in S$ și $\varepsilon > 0$ are loc $F_{pq}(t) > 1 - \alpha$ pentru fiecare $t = d_\alpha(p, q) + \varepsilon$, atunci $d_\alpha(p, q) < \varepsilon$ și pentru (p, q) fixat, $d_\alpha(p, q)$ este necrescătoare și continuă la stînga ca funcție de α. Rezultă că pentru orice $\delta > 0$ familia $\{d_\alpha\}$, $\alpha \in (0, \delta)$, generează aceeași topologie ca și întreaga familie $\{d_\alpha\}$, $\alpha \in (0, 1)$ și avem că $d_\alpha(f(p), f(q)) < k_\alpha t \leqslant k_\alpha d_\alpha(p, q)$ ceea ce implică și concluzia teoremei.

Asemănător se demonstrează

Teorema 3.5.9. [113] *Fie $(S, \mathcal{F}, \mathrm{Min})$ un spațiu Menger nearhimedian complet și (ε, λ)-înlănțuibil. Dacă există $\delta \in (0, 1)$ astfel încît pentru orice $\alpha \in (0, \delta)$ să existe $k_\alpha \in (0, 1)$ cu proprietatea că $F_{pq}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ să implice $F_{f(p)\, f(q)}(k_\alpha t) \geqslant F_{pq}(t)$ cînd $F_{pq}(t) > 1 - \alpha$ atunci f are un punct fix $r \in S$, $f^n(p) \to r$, $n \to \infty$, oricare ar fi $p \in S$.*

Cu privire la existența punctelor periodice $\{p \in S$: cu proprietatea că există $m \in \mathbf{N}$, m finit, astfel încît $f^m(p) = p\}$ avem

Teorema 3.5.10. [39] *Fie f o aplicație a unui spațiu Menger compact $(S, \mathcal{F}, \mathrm{Min})$ în el însuși. Dacă există $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ astfel încît $F_{pq}(\varepsilon) > 1-\lambda$ implică existența unui $\delta > 0$ pentru care avem că $F_{f(p)\, f(q)}(t - \delta) \geqslant F_{pq}(t)$ pentru orice t, atunci mulțimea punctelor periodice pentru f este nevidă dar finită și $\lim_{k \to \infty} f^{m_k}(p) = p'$, p' fiind un punct periodic arbitrar în S.*

În [115] folosim structurile uniforme în scopul definirii unor clase de contracții. Se consideră $\mathcal{D} = \{d_\alpha, \alpha \in I\}$ o familie de pseudometrici pe S care definesc o uniformitate Hausdorff pe S, se asociază fiecărei mulțimi mărginite $A \subseteq S$ numărul real $k_\alpha(A) =$ numărul lui Kuratowski asociat lui (A, d_α) și avem

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.5.11. *Fie S secvențial complet și $f: S \to S$ cu următoarele proprietăți:*

1) *este slab F-contractivă, adică $F(f(p), f(q)) < F(p, q)$ pentru orice $p, q \in S$, $p \neq q$ iar F este o funcție reală inferior semicontinuă pe $S \times S$,*

2) *este α-densificatoare pentru orice $\alpha \in I$, adică are loc relația $k_\alpha(TA) < k_\alpha(A)$ pentru orice mulțime mărginită $A \subseteq S$ cu $k_\alpha(A) > 0$,*

3) *pentru un $x_0 \in S$, $\{T^n x_0\}$, $n \in \mathbf{N}$, este o mulțime mărginită, atunci f are un punct fix unic în S.*

Deducem ca un corolar că dacă

1') $d_\alpha(f(p), f(q)) \leqslant \varphi(d_\alpha(p, q))$, $\varphi: R_+ \to R_+ = [0, \infty)$ *este o funcție continuă la dreapta, nedescrescătoare și astfel încît $\varphi(x) < x$,*

2' *S este mărginită și secvențial completă,*

atunci f are un punct fix unic în S.

În PM-spații avem

Teorema 3.5.12. *Dacă $(S, \mathcal{F})$ este complet, există φ ca și în 1') și astfel încît să avem $F_{f(p)f(q)}(\varphi(t)) \geqslant F_{pq}(t)$, $p, q \in S$, atunci $f: S \to S$ are un punct fix unic.*

Demonstrație. Considerăm $\{d_\alpha\}$, $\alpha \in (0, 1)$ familia pseudometricilor asociate lui $\mathcal{F}$ și din definiția lui φ și a pseudometricilor d_α obținem $d_\alpha(p, q) > d_\alpha(f(p), f(q))$ și concluzia teoremei rezultă din teorema 3.5.12.

Teorema 3.5.13. *Dacă $(S, \mathcal{F})$ este complet, $f: S \to S$ astfel încît $f(S)$ este compactă și f este F-contractivă, atunci f are un punct fix unic.*

Demonstrație. Unicitatea rezultă ușor din proprietatea lui f de a fi F-contractivă iar existența rezultă din compacitatea lui $f(S)$.

Se introduce clasa PM-spațiilor nearhimediene generalizate considerînd că $\mathcal{F}: S \times S \to \mathcal{R}^+$ și se demonstrează [115, Prop. 2.2 și 2.3] că dacă $(S, \mathcal{F}, T)$ este spațiu Menger nearhimedian cu T continuă atunci relația β pe S definită prin $p \beta q$ dacă și numai dacă $\lim_{x \to \infty} F_{pq}(x) = 1$, este o relație de echivalență iar clasele de chivalență $\beta(p)$ sînt închise în (ε, λ)-topologia lui S și $(S/\beta, \mathcal{F}_{S/\beta}, T)$ este un spațiu Menger nearhimedian cu $F_{\beta(p)\beta(q)}(\infty) < 1$. Se demonstrează că S are o descompunere canonică similară spațiilor metrice generalizate [159] și că avem

Teorema 3.5.14. *Fie $(S, \mathcal{F}, \mathrm{Min})$ un spațiu Menger nearhimedian generalizat și complet. Dacă $f: S \to S$ este o contracție probabilistă, $p_0 \in S$ și considerăm șirul aproximațiilor succesive $\{p_0, f(p_0), f^2(p_0), \ldots, f^n(p_0), \ldots\}$ atunci avem următoarele posibilități:* a) *pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots$ avem că* $\lim_{x \to \infty} F_{f^n(p_0) f^{n+1}(p_0)}(x) = a \in [0, 1)$ *sau* b) *șirul aproximațiilor succesive este $\mathcal{F}$-convergent către un punct fix pentru f.*

Demonstrație. Dacă a) nu are loc atunci există m astfel încît $\lim_{x \to \infty} F_{f^m(p_0) f^{m+1}(p_0)}(x) = 1$. Să notăm prin $q_0 = f^m(p_0)$ și atunci $\lim_{x \to \infty} F_{q_0 f(q_0)=1}(x) = 1$ și pentru orice $p \in S$ restricția lui f, $f_p = f|_{\beta(p)}: \beta(p) \to \beta(p)$ este o contracție. Cum $\beta(p)$ este o mulțime închisă pentru orice $p \in S$ și $(S, \mathcal{F})$ este spațiu un Menger nearhimedian complet, deducem că există un punct unic $r \in \beta(p)$ astfel că $f|_{\beta(p)}(r) = r$. Mai mult, putem scrie că $f^n|_{\beta(p)}(s) \to r$, $n \to \infty$, pentru fiecare $s \in \beta(p)$. Rezultă că $f: S \to S$ are un punct fix dacă și numai dacă $f|_{\beta(p)}$ are un punct fix pentru un $p \in S$ iar r este un punct fix pentru f și $r = \lim_{n \to \infty} f^n(p_0)$ ceea ce încheie demonstrația.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 3.5.15. [114] *Fie* $(S, \mathcal{F}, \text{Min})$ *un spațiu Menger generalizat complet și* $\{f_i\}$ *un șir de aplicații,* $f_i: S \to S$ *pentru care avem că:*

1) *există* $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$ *și* $k \in (0, 1)$ *astfel încît*

$F_{f_i(p)f_i(q)}(kx) \geq F_{pq}(x)$ *pentru orice* $x > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ *dacă* $F_{pq}(\varepsilon_0) > 1 - \lambda_0$ *(adică distanța dintre* p *și* q *nu este „poate infinită"),*

2) $f_i(f_j) = f_j(f_i)$, $i, j = 1, 2, \ldots$

3) *dacă* $p_0 \in S$ *și* $p_n = f_n(p_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ *atunci există* $n(p_0) = m$ *astfel încît pentru* $n \geq m$ *să avem că* $F_{f_{n+i}(p_n)p_n}(\varepsilon_0) > 1 - \lambda_0$, $i = 1, 2, \ldots$ *atunci există* $p \in S$ *astfel că* $p_n \to p$ *și* $f_n(p) \to p$, $n \to \infty$ *și* $f_i(p) = p$, $i = 1, 2, \ldots$ *iar dacă* $f_n(p) \to p$ *și* $f_n(p') \to p'$ *implică* $\lim_{x \to \infty} F_{pp'}(x) = 1$, *atunci* p *este unic.*

Teorema 3.5.16. *Fie* $(S, \mathcal{F}, \text{Min})$ *un spațiu Menger generalizat complet și* $f_i: S \to S$, $i = 1, 2, \ldots$ *un șir de aplicații, închis relativ la operația de compunere și astfel încît să avem*

1) *există* $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$, $k \in (0, 1)$ *și un întreg* $m \geq 1$ *astfel încît dacă* $p, q \in S$ *și* $F_{pq}(\varepsilon_0) > 1 - \lambda_0$ *atunci* $F_{f_{m+i}(p)f_{m+i}(q)}(kx) \geq F_{pq}(x)$ *pentru orice* $x > 0$, $i = 1, 2, \ldots$,

2) $f_i(f_j) = f_j(f_i)$, $i, j = 1, 2, \ldots$

3) *fie* $p_0 \in S$ *arbitrar,* $p_n = f_n(p_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ *și presupunem că există* $n(p_0)$ *astfel că pentru* $n > n(p_0)$ *să avem că*

$$F_{f_{n+i}(p_n)p_n}(\varepsilon_0) > 1 - \lambda_0 \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots,$$

atunci există p *astfel încît* $p_n \to p$ *și* $f_n(p) \to p$ *pentru* $n \to \infty$. Dacă $f_n(p') \to p'$, $f_n(p'') \to p''$, $n \to \infty$, implică $\lim_{x \to \infty} F_{pq}(x) = 1$ atunci p este unic și $f_{j+i}(p) = p$, $j = \max\{m, n(p_0)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, [114].

În [46] se consideră contracții generalizate ca fiind acele aplicații $f: (S, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{F})$ pentru care există $k \in (0, 1)$ astfel încît $F_{f(p)f(q)}(kx) \geq \min\{F_{pq}(x), F_{pf(p)}(x), F_{qf(q)}(x), F_{pf(q)}(2x), F_{qf(p)}(2x)\}$ pentru orice $x > 0$, $p, q \in S$ și se demonstrează

Teorema 5.3.17. *Dacă* $(S, \mathcal{F}, \text{Min})$ *este un spațiu Menger iar* $f: S \to S$ *este o contracție generalizată pe* S *și* S *este* f*-orbital completă (adică orice șir Cauchy de forma* $\{f^{n_i}(p)\}_{i \in \mathbf{N}}$ *converge în* S*) atunci* f *are un punct fix unic* $p \in S$ *și* $f^n(q) \to p$, $n \to \infty$, *pentru orice* $q \in S$.

Alte rezultate referitoare la clase mai generale de aplicații introduse cu ajutorul măsurilor aleatoare de necompacitate (α — contracții probabiliste sau γ-condensatoare) au fost date în [24], [25], [27].

În concluzie teoria punctelor fixe în abordarea ei probabilistă oferă un cîmp larg de investigații de care analiza probabilistă beneficiază din plin creînd noi instrumente sau noi domenii de cercetare.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

UNELE APLICAȚII ALE STRUCTURILOR PROBABILISTE

Structurile probabiliste s-au dovedit adecvate unor aplicații largi în modelarea unor fenomene sau procese fizice cum sînt cele legate de teoria generală a sistemelor care posedă hysteresis, teoria amestecurilor, teoria erorilor, aplicațiile din psihologie, pedagogie sau teoria fiabilității. Ele se dovedesc un cadru potrivit pentru dezvoltarea teoriei informației sau a fizicii microcosmosului.

§ 1. IDEI ȘI REZULTATE PRIVIND TEORIA GENERALIZATĂ A INFORMAȚIEI

J. Kampé de Fériet și B. Forte [128], [129], [132] propunîndu-și să degajeze teoria informației de legătura ei prea strînsă cu teoria probabilităților elaborează o concepție nouă care se aplică și evenimentelor care prin natura lor nu pot fi repetate, deci nu pot fi studiate statistic, pun bazele unor măsuri subiective ale informației. De asemenea, J. Kampé de Fériet în [129], [130], [132] introduce spațiul informațiilor aleatoare cu o uimitoare interpretare a spațiului de probabilitate implicat ca și o „mulțime de observatori". Acest nou stil de abordare deschide un nou domeniu în teoria informației, oferă largă aplicabilitate reprezentabilității semigrupurilor în construirea de tipuri noi de informații, permitè utilizarea unor tehnici variate, stabilirea unor legături bogate cu domenii noi ale matematicii îmbogățind punctele de vedere existente și conduce la numeroase aplicații.

Contribuțiile aduse de B. Schweizer și A. Sklar [245], [247] oferă noi aplicații structurilor probabiliste în teoria informației și posibilități de dezvoltare ale teoriei axiomatice în sensul amintit, legînd-o sub o formă nouă cu analiza probabilistă. Ei dovedesc prin exemple și modele probabiliste că măsura informației este natural să fie interpretată ca o variabilă aleatoare. Astfel ei consideră $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ și asociază fiecărui element $A \in \mathcal{C}$ funcția $K(A) \in \mathcal{R}^+$ care în punctul x se interpretează ca și probabilitatea ca măsura cantității de informație să fie mai mică decît x. Se impun următoarele axiome:

1) dacă $\Omega \in \mathcal{C}$, atunci $K(\Omega) = H_0$; dacă $\varnothing \in \mathcal{C}$, atunci $K(\varnothing) = 0 = H_{-\infty}^0$,

2) pentru orice $A, B \in \mathcal{C}$ cu $A \subseteq B$ rezultă că $K(A) \leqslant K(B)$,

3) dacă A și B sînt elemente independente [130] vom avea că $K(A \cap B) = \sigma(K(A), K(B))$ unde σ este o funcție triunghiulară pe o mulțime Z_K care conține valorile lui K,

4) dacă A, B, $A \cup B \in \mathcal{C}$ și $A \cap B = \varnothing$, atunci $K(A \cup B) = \varphi(K(A), K(B))$ unde $\varphi: Z_K \times Z_K \to Z_K$ este comutativă, asociativă, monotonă și verifică condiția $\varphi(F, H_0) = H_0$ și $\varphi(F, 0) = F$.

De exemplu, dacă J este măsura de informație în sensul din [128] cu legea de compoziție Φ atunci se poate defini $K(A; x) = G(x/J(A))$ cu G fixat în $\mathcal{R}_0^+$ iar $\sigma(K(A), K(B); x) = G(x/(J(A) + J(B)))$ și $\varphi(K(A), K(B); x) = G(x/\Phi(J(A), J(B)))$.

Pentru a cuprinde și cazul măsurii informației printr-o mulțime de observatori [129] în [247] se modifică axiomele 3) și 4) folosind teoria copulelor și τ_T-structurilor:

3') dacă A și B sînt independente atunci $\tau_{T_m}(K(A), K(B)) \leqslant K(A \cap B) \leqslant \pi_{\text{Min}}(K(A), K(B))$,

4') dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci $\text{Min}\,(K(A; x), K(B; x)) \leqslant K(A \cup B; x) \leqslant \text{Min}\,(K(A; x) + K(B; x), 1)$.

Se arată că există măsuri aleatoare de informație care nu se pot deduce printr-o mulțime de observatori.

Statistica informațională în sensul lui O. Onicescu [200], [203], [204] înzestrată cu o aleatorizare similară este unul dintre domeniile de mare actualitate care dă răspuns unor probleme importante din economie, pedagogie, psihologie și teoria informației.

Caracterizarea entropiei topologice a omeomorfismelor spațiilor Menger compacte, a entropiei condiționate, sau rezultatele privind capacitatea și dimensiunea Hausdorff a mulțimilor din PM-spații inițiate în [226], [227], [228] oferă largi perspective privind aplicarea măsurilor aleatoare de necompacitate introduse în [21], [52].

Desigur că acestea sînt numai cîteva dintre ideile și rezultatele care justifică utilitatea structurilor probabiliste.

§ 2. APLICAȚII ALE PM-SPAȚIILOR LA STUDIUL SISTEMELOR CE POSEDĂ HYSTERESIS ȘI ÎN PROCESELE LEGATE DE AMESTECURI

Se constată că multe sisteme din fizica microscopică prezintă un răspuns la variația unor agenți externi cum este, de exemplu, un cîmp magnetic, o apăsare, o tendință de ordonare. Asemenea răspunsuri nu pot fi descrise cu ajutorul unei funcții de stare ci mai de grabă trebuie prezentată o așa zisă istorie a dependenței acestui răspuns de variația agenților externi. Despre asemenea sisteme se spune că prezintă *fenomenul de hysteresis* cum este cazul materialelor feromagnetice care se caracterizează printr-o curbă de magnetizare adică o funcție care dă momentul magnetic ca funcție de cîmpul magnetic exterior. Există și alte sisteme materiale în care este prezent fenomenul de hysteresis cum este cazul sistemelor supuse la apăsare-încordare (fenomenul de hysteresis „stress-strain") sau de tranziție ordine-dezordine în aliaje și altele. Asemenea tendințe pot fi extrapolate la o clasă largă de sisteme cu ajutorul unor argumente de topologie în sensul Morse-Lusternik-Schnirelmann. Aceste rezultate sugerează că ireversibilitatea în multe sisteme macroscopice este o manifestare a unei mulțimi dense de puncte de instabilitate adică puncte de singularitate ale matricii hessiene în spațiul fazelor. La sisteme complexe și în particular la sisteme macroscopice singularitățile devin foarte numeroase și este posibil să se obțină concluzii cantitative, prin metode pur statistice, privind fenomenul de hysteresis pe care ele îl generează. Într-un sistem în care este prezent fenomenul de hysteresis are loc o pierdere de energie

Scanned with OKEN Scanner

și elucidarea acestei energii pierdute este obiectul oricărei teorii fenomenologice privind hysteresisul. O teorie generală privind această fenomenologie a fost elaborată de T. Erber, S. A. Guralnick, H. G. Latal și B. N. Harmon [70], [72], [73] pentru care modelarea matematică oferită de PM-spații prin contribuțiile lui B. Schweizer, A. Sklar și T. Erber în [71], [74] au deschis calea unor asemenea aplicații fundamentale ale structurilor probabiliste. Deducerea ca și cazuri particulare a legilor lui Rayleigh pentru hysteresisul sistemelor feromagnetice și legilor lui Dorey pentru hysteresisul stress-strain precum și ilustrarea lor prin studiul detaliat al sistemelor supuse la solicitări variabile de încărcare-descărcare sau alte rezultate experimentale compatibile cu teoria generată amintită, oferă acestora garanția utilității și importanței în știința modernă.

Cu toate că rezultatele amintite, sînt de-a dreptul spectaculoase, prin modul în care reușesc să ofere instrumente matematice eficace, care conduc la elaborarea unei teorii generale a fenomenului de hysteresis, nu ne vom opri asupra lor din lipsă de spațiu, ele fiind prezentate și în [124].

În scopul prezentării altor rezultate să amintim că E. Hopf [100] a introdus noțiunea de *transformare de amestec* (mixing) ca model al proceselor fizice care apar cînd soluțiile sînt omogen dispersate în dizolvanți, prin mișcări prelungite. Datorită strînsei legături dintre această clasă de aplicații și clasele de funcții care păstrează măsura sau a celor ergodice care permit utilizarea unor instrumente matematice deosebit de utile, cum este teorema ergodică a lui Birkhoff și altele, precum și datorită posibilităților de asociere a unor PM-spații, se obțin astfel căi probabiliste de abordare a unor probleme de amestec. De asemenea, menționăm utilitatea rezultatelor în studiul relațiilor dintre principiile de recurență cum sînt: recurența stabilă, recurența exactă și recurența Poincaré [74]. Ele se aplică și la studiul ireversibilității macroscopice care se justifică astfel ca și o manifestare a microinstabilităților [74].

Să amintim mai întîi cîteva rezultate [248] privind utilizarea teoremei ergodice a lui Birkhoff la construirea unei noi clase de PM-spații. În acest scop considerăm un spațiu metric (S, d) înzestrat cu o măsură de probabilitate P și o aplicație f care păstrează măsura pe S și vom arăta că pentru orice $x > 0$ și aproape orice pereche $(p, q) \in S \times S$ există o funcție de repartiție F_{pq} astfel că fracțiunea de timp măsurată prin aceea că distanța dintre $f^n(p)$ și $f^n(q)$ să fie mai mică decît x, tinde la $F_{pq}(x)$ cînd $n \to \infty$ și se obține un spațiu pseudometric probabilist pe care f este o aplicație care păstrează distanța probabilistă.

Vom presupune că S este separabil, vom nota prin $D(x) = \{(p, q): d(p, q) < x\}$ și prin χ_A funcția caracteristică a mulțimii A și vom obține că pentru fiecare pereche $(p, q) \in S \times S$ și orice întreg pozitiv n, funcția

$$F_{pq}^{(n)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \chi_{D(x)}(f^m(p), f^m(q)) \tag{1}$$

aparține la $\mathcal{R}^+$ și pentru orice $\alpha > 0$ numărul

$$\mu_\alpha^{(n)}(p, q) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (d(f^m(p), f^m(q)))^\alpha$$

este momentul de ordin α al lui $F_{pq}^{(n)}$.

Dacă definim $\mathcal{F}^{(n)}: S \times S \to \mathcal{R}^+$ prin $\mathcal{F}^{(n)}(p, q) = F_{pq}^{(n)}$ atunci $(S, \mathcal{F}^{(n)})$ este spațiu Menger relativ la $T = T_m$ căci axioma de identitate și cea de simetrie sînt evidente iar axioma triunghiului rezultă din faptul că (S, d) este

un spațiu metric și deci pentru orice $m \geqslant 0$ avem $d(f^m(p), f^m(r)) \leqslant d(f^m(p), f^m(q)) + d(f^m(q), f^m(r))$ ceea ce implică $\chi_{D(x+y)}(f^m(p), f^m(r)) \geqslant \chi_{D(x)}(f^m(p), f^m(q))\chi_{D(y)}(f^m(q), f^m(r)) \geqslant \chi_{D(x)}(f^m(p), f^m(q)) + \chi_{D(y)}(f^m(q), f^m(r)) - 1$ și deci inegalitatea triunghiului sub forma lui Menger are loc pentru $T = T_m$.

Prezintă interes cazul cînd există limită pentru $n \to \infty$ pentru $F_{pq}^{(n)}$ sau $\mu_\alpha^{(n)}$ și se pot defini limite de spații $(S, \mathcal{F}^{(n)})$. Să observăm că dacă f este o izometrie pe S atunci $\lim_{n\to\infty} F_{pq}^{(n)}(x) = H_{d(p,q)}(x)$ și $\lim_{n\to\infty} \mu_\alpha^{(n)}(p, q) = d^\alpha(p, q)$ iar cînd f este o contracție pe S vom avea $\lim_{n\to\infty} F_{pq}^{(n)}(x) = H_0(x)$ și $\lim_{n\to\infty} \mu_\alpha^{(n)}(p, q) = 0$.

Un exemplu interesant este dat de cazul cînd (S, d) este dreapta reală cu metrica obișnuită iar f definită prin $f(p) = 1/p$ pentru $p \neq 0$ și $f(0) = 0$ cînd $\lim_{n\to\infty} F_{pq}^{(n)}$ există întotdeauna afară de cazul cînd $d(p, q) = d(f(p), f(q))$ este o funcție simplă cu două salturi, unul în $d(p, q)$ și altul în $d(f(p), f(q))$ ambele de înălțime mai mare ca 1/2, iar pentru momente avem $\lim_{n\to\infty} \mu_\alpha^{(n)}(p, q) = \frac{1}{2}(d^\alpha(p, q) + d^\alpha(f(p), f(q)))$. Funcția f este o aplicație care păstrează măsura cînd aceasta este convenabil aleasă, cum este de exemplu măsura absolut continuă a cărei densitate de repartiție este dată de legea lui Cauchy $\left(g(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}\right)$.

Acest exemplu și rezultatele din [73], [74] ne conduc să punem unele restricții și anume

1) (S, d) este separabil,

2) pe S s-a definit o măsură de probabilitate P definită pe o σ-algebră ce conține mulțimile boreliene ale lui S,

3) f este o aplicație care păstrează măsura relativ la P.

În acest caz dacă notăm prin P^2 măsura produs indusă de P pe $S \times S$ vom avea

Teorema 4.2.1. *Dacă sînt verificate ipotezele* 1) — 3) *atunci există o submulțime* $W_0 \subseteq S \times S$ *cu* $P^2(W_0) = 1$ *astfel încît pentru orice* $(p, q) \in W_0$ *șirul funcțiilor de repartiție* $\{F_{pq}^{(n)}\}$ *converge în repartiție către o funcție* $F_{pq} \in \mathcal{D}^+$ *și* $(W_0, \mathcal{F})$ *este un spațiu pseudometric probabilist de tip Menger relativ la* T_m, *unde* $\mathcal{F}$ *este definită prin* $F(p, q) = F_{pq}$.

Demonstrație. Din faptul că f este o aplicație care păstrează măsura relativ la P aplicația $f \times f$ definită pe $S \times S$ prin $(f \times f)(p, q) = (f(p), f(q))$ păstrează măsura relativ la P^2 și din ipoteza că (S, d) este separabil și P este definită pe o σ-algebră ce conține mulțimile boreliene din S, rezultă că $D(x)$ este măsurabilă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ [15]. Atunci pentru orice $x > 0$ fixat, teorema ergodică a lui Birkhoff [91] implică existența unei submulțimi $W(x) \subseteq S \times S$ cu proprietatea că $P^2(W(x)) = 1$ și

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \chi_{D(x)}(f^m(p), f^m(q)) = \lim \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \chi_{D(x)}[(f\times f)^m(p, q)]$$

există pentru orice $(p, q) \in W(x)$. Vom nota această limită prin $L_{pq}(x)$ și vom observa că pentru orice $x \leqslant 0$ și orice $p, q \in S$ avem că există $L_{pq}(x) = 0$. Fie $\{x_i\}$ o mulțime numărabilă densă în $(0, \infty)$ și $\{W(x_i)\}$ mulțimile asociate mai sus, de măsură P^2 egală cu 1 și $W_0 = \bigcap_{i=1}^{n} W(x_i)$, atunci evident avem că

$P^2(W_0) = 1$ și pentru orice $(p, q) \in W_0$, $L_{pq}(x)$ este definită pentru $x \leqslant 0$ sau $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Cum $D(x') \subseteq D(x'')$ dacă $x' < x''$ rezultă că pentru orice $(p, q) \in W_0$, L_{pq} este nedescrescătoare pe domeniul ei de definiție și deci ea determină în mod unic o funcție $F_{pq} \in \mathcal{R}^+$ definită prin $\sup \{L_{(pq}x_i) : x_i < x\}$ pentru $x > 0$ și nulă în rest iar convergența cerută $F^{(n)}_{pq}(x) \to F_{pq}(x)$ pentru orice punct de continuitate x al lui F_{pq} este imediată.

Obținem că $\mathcal{F}$ este bine definită pe W_0 iar axiomele de identitate și simetrie sînt ușor de verificat pentru orice $(p, q) \in W_0$. Pentru orice p, q $r \in S$ pentru care (p, q), (q, r), $(p, r) \in W_0$ și $x, y \geqslant 0$ prin trecere la limită pentru $n \to \infty$ în inegalitatea lui Menger cu $T = T_m$ formulată pentru funcțiile $F^{(n)}_{\cdot\cdot}$ se obține că

$$F_{pr}(x+y) \geqslant T_m(F_{pq}(x)F_{qr}(y)).$$

Evident că dacă $p, q \in S$, $p \neq q$ și $(p, q) \in W_0$ iar $f^m(p) = f^m(q)$ pentru $m > 0$ atunci $F_{pq} = H_0$ și nu rezultă $p = q$ deci avem un spațiu pseudometric probabilist $(S, \mathcal{F})$ și teorema este demonstrată.

Să observăm că în general $W_0 \neq S \times S$ printr-o mulțime de măsură P^2 nulă ceea ce nu prezintă importanță.

Amintind că teorema ergodică asigură pe lîngă existența a.p.t. a limitei g^* a șirurilor de forma $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} g(f^m x)$ și invarianța lui g^* la f în sensul că $g^*(f(x)) = g^*(x)$ și $\int g = \int g^*$ dacă spațiul suport are măsură finită.

Corolarul 1. *Dacă* $p, q \in S$ *și* $(p, q) \in W_0$ *atunci* $\mathcal{F}(f(p), f(q)) = \mathcal{F}(p, q)$ *și pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *fixat avem că* $P^2(D(x)) = \int_{W_0} F_{pq}(x)\, dP^2(p, q)$.

Prin urmare aplicația f păstrează distanța probabilistă pe W_0. De asemenea, din măsurabilitatea lui $D(x)$ și continuitatea metricii d rezultă că pentru orice $\alpha > 0$ funcția d^α este măsurabilă și avem

Corolarul 2. *Dacă pentru fiecare* $\alpha > 0$ *funcția* $d^\alpha \in L(S \times S, P^2)$ *atunci există o submulțime* $W_\alpha \subseteq S \times S$ *cu* $P(W_\alpha) = 1$ *astfel încît șirul momentelor de ordin* α, $\{\mu^\alpha_{(n)}(p, q)\}$ *converge pentru fiecare pereche de puncte* $(p, q) \in W_\alpha$. *Dacă în plus există un* α_0 *astfel încît* $|x|^{\alpha_0}$ *este uniform integrabilă relativ la* $\{F^{(n)}_{pq}\}$ [154] *atunci pentru orice* $\alpha \leqslant \alpha_0$, $\lim_{n\to\infty} \mu^{(n)}_\alpha(p, q)$ *există, este finită și egală cu* $\mu_\alpha(p, q)$.

O altă consecință este aceea că spațiul pseudometric probabilist $(W, \mathcal{F})$ poate fi privit ca limită slabă de E-spații.

Să observăm că dacă transformarea $f \times f$ este ergodică atunci $\lim_{n\to\infty} F^{(n)}_{pq}$ este independentă de perechea (p, q) și deci există o funcție fixă $F \in \mathcal{R}^+$ astfel încît $F_{pq}(x) = F(x)$ pentru orice $(p, q) \in W_0$ și orice $x \in \mathbf{R}$, adică spațiul pseudometric obținut este echilateral. O asemenea situație se obține în cazul clasei transformărilor de amestec (mixing) cu aplicații în fizică.

În adevăr, să amintim [73] că o aplicație $f:(S, d) \to (S, d)$ ((S, d) presupus separabil și înzestrat cu o măsură de probabilitate P al cărei domeniu de definiție conține mulțimile boreliene din S) se numește (tare) *mixing* dacă imaginea inversă $f^{-1}(A)$ a oricărei mulțimi P-măsurabile este P-măsurabilă și $\lim_{n\to\infty} P(f^{-1}(A) \cap B) = P(A)\,P(B)$, oricare ar fi părțile măsurabile $A, B \subseteq S$.

Dacă în S există două sfere deschise Q_1 și Q_2 și un număr pozitiv x_0 astfel încît $P(Q_1) > 0$, $P(Q_2) > 0$ iar $d(p, q) > x_0$ pentru orice $p \in Q_1$ și $q \in Q_2$,

Scanned with OKEN Scanner

se spune că P este *nesingulară*. Dacă $P(Q) > 0$ pentru orice sferă deschisă $Q \subseteq S$ se spune că P este *pervazivă*.

Vom nota prin diam $(A) = \sup_{p, q \in A} d(p, q)$ iar pentru orice mulțime măsurabilă $B \subseteq S$ se introduce *diametrul esențial* dat prin ess diam $(B) = \inf_{C \in \mathcal{C}}$ diam (C), $\mathcal{C} = \{C : C \subseteq B, C$ măsurabilă și cu proprietatea că $P(C) = P(B)\}$. Este evident că ess diam $(B) \leqslant$ diam (B) pentru orice mulțime măsurabilă B. Pentru orice mulțime $A \subseteq S$ și $x > 0$ se notează prin $N(A, f, x)$ mulțimea întregilor pozitivi m pentru care avem diam $(f^m(A)) < x$ iar prin ess $N(A, f, x)$ se notează mulțimea întregilor pozitivi m pentru care ess diam $(f^m(A)) < x$ și avem

Teorema 4.2.2. *Fie f o aplicație mixing relativ la o măsură de probabilitate P nesingulară pe un spațiu metric separabil (S, d), atunci pentru orice submulțime $A \subseteq S$, P-măsurabilă cu $P(A) > 0$, există $x_0 > 0$ astfel încît*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n} \chi_{N(A, f, x_0)}(m) = 0 \tag{2}$$

iar dacă P este pervazivă atunci x_0 poate fi ales orice număr mai mic decît ess diam(S). *Dacă $f(A)$ este măsurabilă pentru orice mulțime măsurabilă A atunci în* (2) *se poate înlocui $N(A, f, x_0)$ prin ess $N(A, f, x_0)$.*

Dacă se presupune că f este o aplicație mixing inversabilă (adică este bijectivă și imaginea oricărei mulțimi P-măsurabile este o mulțime P-măsurabilă) teorema de mai sus rezultă ca un corolar din

Teorema 4.2.3. *Fie f o aplicație mixing relativ la o măsură de probabilitate P nesingulară pe (S, d) (nu neapărat separabil), atunci există un număr pozitiv x_0 astfel că pentru orice mulțime A care este P-măsurabilă cu $P(A) > 0$ există un număr întreg pozitiv $n(A)$ astfel încît să avem* ess diam $(f^m(A)) > x_0$ *pentru orice $m > n(A)$ și dacă f este pervazivă, x_0 poate fi ales orice număr mai mic ca* ess diam (S).

Nu vom da aici demonstrația [73] dar vom preciza că teorema 4.2.2 se deduce din observația că în general două aplicații mixing f_i, $i = 1, 2$ relative la două măsuri P_i pe S_i, $i = 1, 2$ implică proprietatea de mixing pentru aplicația $f_1 \times f_2$ relativ la $P_1 \times P_2$ pe $S_1 \times S_2$ și că $D(x)$ este P^2-măsurabilă pentru fiecare x iar funcția reală F definită prin $F(x) = P^2(D(x))$ este o funcție de repartiție cu proprietatea că $F(x) = 0$ pentru $x \leqslant 0$. Dacă P este nesingulară există un număr pozitiv x_0 astfel încît $F(x_0) < 1$ în timp ce pervazivitatea lui P implică $F(x) < 1$ pentru orice $x <$ ess diam (S). În plus avem

Teorema 4.2.4. *Dacă f este o aplicație mixing relativ la o măsură de probabilitate P pe spațiul metric separabil (S, d) și pentru orice întreg pozitiv fixat k, un $2k$-uplu arbitrar $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_{2k-1}, w_{2k})$ de puncte din S, și un $x > 0$ arbitrar se notează prin $M(k, \mathbf{w}, f, x)$ mulțimea numerelor întregi pozitive m cu proprietatea că $d(f^m(w_1), f^m(w_2)) < x, \ldots, d(f^m(w_{2k-1}), f^m(w_{2k})) < x$, atunci există o mulțime W_k în S^{2k} cu $P^{2k}(W) = 1$ astfel încît pentru orice $\mathbf{w} \in W_k$ să avem $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} M(k, \mathbf{w}, f, x)(m) = (F(x))^k$, pentru orice $x > 0$, unde* $F(x) = P^2(D(x))$.

Aceste rezultate sînt importante mai ales prin interpretările lor fizice în ideea că în ultimul timp în teoria proceselor de amestec cu ajutorul aplicațiilor de amestec (mixing) se scot în evidență efecte de împrăștiere cum este cazul teoremelor 4.2.2 și 4.2.3 cît și teoremei 4.2.4 care în esență afirmă că pentru aproape toate perechile de puncte, distanța dintre imaginile punctelor

Scanned with OKEN Scanner

printr-o aplicație de amestec se comportă ca o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție este dată de F. Mai mult, pentru aproape toate mulțimile finite de perechi de puncte, variabilele aleatoare corespunzătoare sînt independente și au aceeași repartiție. În acest fel aplicațiile de amestec dau naștere la o nouă clasă de PM-spații care prin analogie cu PM-spațiile echilaterale se numesc *aproape-echilaterale*.

Distanța medie $\int_0^\infty x\mathrm{d}F(x)$ introdusă în [74] pentru caracterizarea efectelor de împrăștiere ale unei aplicații mixing, deși nu diferă pentru aplicații diferite pe același spațiu (pentru că F depinde numai de metrica d și de măsura P) ea oferă o valoare de comparație cu privire la rapiditatea și uniformitatea procesului de amestec și cu privire la abaterile acestuia de la valoarea medie pentru mulțimi particulare de puncte.

În [224] se dau demonstrații independente de teorema ergodică pentru anumite rezultate din [73] și se răspunde afirmativ la conjectura lui P. Johnson și A. Sklar că nici o mulțime măsurabilă netrivială în (S, d) nu este coerent recurentă relativ la nici o aplicație mixing.

Ideea că chiar dacă au loc anumite fuziuni ele nu durează decît puțin timp și în final se dispersează, are numeroase aplicații în biologie sau în cosmologie. Cele mai concrete rezultate se par a fi pînă în prezent cele legate de problema recurenței formulată de Poincaré, teoremele 4.2.2 și 4.2.3 oferind o justificare intuiției fizice formulată de L. Boltzmann.

§ 3. SPAȚII STOCASTICE CU APLICAȚII ÎN FIZICA MICROCOSMOSULUI

Pornind de la considerentele filozofice care privesc spațiul și timpul ca forme de existență a materiei și de la faptul că drumul către înțelegerea legităților care domină lumea particulelor elementare încă nu este ușor de găsit, fizica teoretică admite concepții conciliatoare care într-o oarecare măsură constituie succese particulare. În acest stadiu de dezvoltare încercările de analiză critică sau elucidare a unor abordări ale entității de spațiu-timp în lumea particulelor elementare, analiza dificultăților teoriei moderne cu privire la incorectitudinea diferitelor reprezentări geometrice folosite pentru descrierea interacțiunilor particulelor elementare la distanțe mici și al relațiilor spațiu-timp, sînt deosebit de utile. Se știe că abordările structuraliste ale geometriei au permis includerea în mod indirect a noțiunii de mișcare și au permis ca unul dintre obiectele sale să devină însăși ordonarea evenimentelor. Calea deschisă de unificarea spațiului și timpului permite studierea apropierii evenimentelor atît în spațiu cît și în timp și fundamentarea operației de ordonare a evenimentelor pe baza cauzalității adică a formei genetice de legătură dintre ele. Stadiul existent din geometria macro și microcosmosului lasă încă deschise multe probleme privind raporturile spațiu-timp care s-ar părea că trebuie schimbate, se pune problema ce le corespunde în realitate în lumea particulelor elementare coordonatelor spațiale x și celor temporale t, etc. La asemenea probleme își propune să răspundă excelenta monografie a lui D. I. Blokhintsev [17] și alte lucrări recente ale sale [18], [19], [20] din care ne propunem să expunem cîteva aspecte legate de abordarea stocastică a microcosmosului.

Aritmetizarea entității spațiu-timp ca operație de asociere a unui n-uplu de coordonate ale unei varietăți geometrice, la fiecare eveniment elementar,

Scanned with OKEN Scanner

permite identificarea evenimentelor cu punctele acestei entități. Desigur că se presupun cunoscute metode sau procese fizice pe care se bazează această aritmetizare care trebuie deci să ofere posibilitatea distinctibilității acestor puncte independent de aritmetizarea făcută, să reprezinte obiectiv, modelînd procese materiale și asigurînd o anumită universalitate. Existența mai multor procedee fizice de aritmetizare a entității spațiu-timp deci a mai multor tipuri de ordonare a evenimentelor constituie baza fizicii teoretice. Dintre acestea menționăm pe acela care asociază la fiecare eveniment elementar un punct din $\mathbf{R}^4(x) = \{\mathbf{x},\ \mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)\}$ care are la bază și convenția universalității constanței vitezei luminii și a existenței unui ceas cu mers uniform. Această cale conduce la un spațiu Minkowski cu metrică nedefinită care se notează în mod curent prin $ds^2 = c\ dt^2 - d\mathbf{x}^2$.

Principiul cauzalității și celelalte metode de descriere a fenomenelor din fizica cuantică au un caracter probabilistic, în virtutea căruia este necesar să facem distincție între ceea ce este potențial posibil și ceea ce s-a realizat, se impune luarea în considerare a relativității față de mijloacele de observație. Principiul cauzalității se referă nemijlocit la probabilitate, adică la potențialul posibil și nu la evenimente efectiv realizate.

Metricile probabiliste amintite în capitolele anterioare au condus la ideea aritmetizării stocastice a spațiului. Totuși aceste investigații sînt legate de cazul geometriei euclidiene care are o metrică pozitivă definită. Din punctul de vedere al fizicii prezintă importanță spațiul pseudo-euclidian al lui Minkowski. Metrica nedefinită a acestui spațiu conduce la o serie de probleme specifice care nu apar în cazul spațiului euclidian. Aritmetizarea spațiului se face asociind fiecărui element al său, care are o anumită semnificație fizică, un număr $x(P)$ numit coordonată și care se obține măsurînd distanța $r(P, O)$ pînă la un element condiționat (O) numit coordonata originii. Caracterul stocastic al distanței $r(P, O)$ rezultă din aceea că dacă s-a măsurat $r(P, O)=L$ atunci distanța adevărată l dintre elementele P și O este egală cu L cu probabilitatea

$$dW(L, l) = w(L, l)dl. \tag{1}$$

În acest mod aritmetizarea varietății spațiale devine stocastică și fiecare coordonată măsurată $x(P)$ a elementului P poate coincide cu coordonata adevărată $X(P)$ numai cu o probabilitate oarecare. În general prin spațiu stocastic se înțelege un asemenea spațiu $R_{st}(X)$ care se reprezintă stocastic pe spațiul coordonatelor măsurabile $R(x)$ și se introduce probabilitatea

$$dW(X, x) = w(X; x)dx. \tag{2}$$

Această formulă se deosebește de formula (1) numai prin aceea că distanțele L și l pot primi și semnul minus, ele fiind privite ca și coordonatele măsurate și respectiv adevărate ale punctului P. Dacă spațiul este omogen probabilitatea din stînga lui (2) este funcție numai de diferența $X-x$ și devine

$$dW(X, x) = w\left(\frac{X - x}{a}\right)\frac{dx}{a} \tag{3}$$

unde a este dimensiunea unei lungimi și caracterizează împrăștierea valorilor particulare ale coordonatelor stocastice x în jurul valorilor lor medii $\bar{x} = X(P)$.

Abordarea stocastică este întîlnită sub diferite forme la mai mulți autori și în esență acestea se pot rezuma la faptul că coordonatele „adevărate" (x, t) ale evenimentului fizic P, datorită unor incertitudini principiale, proprie

Scanned with OKEN Scanner

aparatului, măsurătorile x, t sau însuşi evenimentul P se pot defini numai cu o oarecare probabilitate. Aceasta trebuie subînţeleasă în sensul că dacă se reprezintă mulţimea tuturor laboranţilor care posedă aparate identice şi ideale pentru măsurarea coordonatelor evenimentului P, totuşi ei primesc rezultate diferite pentru $x = x(P)$, repartizate statistic în jurul valorii medii $\bar{x} = X(P)$, dată prin

$$\bar{x} = X(P) = \int x w\left(\frac{X - x}{a}\right)\frac{dx}{a}, \tag{4}$$

şi cu dispersia

$$\Delta x^2 = \overline{(X - x)^2} = \int (X - x)^2 w\left(\frac{X - x}{a}\right)\frac{dx}{a} = a^2 \tag{5}$$

cu condiţia de normare $\int w\left(\frac{X - x}{a}\right)\frac{dx}{a} = 1$.

În esenţă se pot rezuma următoarele cauze care conduc la spaţiul stocastic $R_{st}(X)$:

a) aparatul ideal care măsoară distanţa posedă o inexactitate incorigibilă $\Delta x \approx a$,

b) obiectele (particulele) cu ajutorul cărora se fixează punctele spaţiului au dimensiuni finite a, ceea ce conduce la $\Delta x \approx a$,

c) mediul în care se răspîndeşte semnalul care serveşte la măsurarea distanţei, este turbulent ceea ce implică fluctuaţii ale semnalului.

Prezenţa unei metrici nedefinite în cazul spaţiului fizic atrage după sine că formula (3) nu poate fi generalizată la entitatea spaţiu-timp real prin mărirea numărului de măsurători. În adevăr, invarianţa repartiţiei dW relativ la transformarea Lorentz cere ca densitatea de probabilitate w să fie o funcţie invariantă. Singurul invariant posibil ar fi intervalul s^2 însă repartiţia

$$dW = w\left(\frac{s^2}{a^2}\right)\frac{d^4x}{a^4} \tag{6}$$

este nenormabilă şi nu poate reprezenta o repartiţie stocastică a variabilei $x(P)$ concentrată în jurul punctului P.

Pentru a putea primi concentrarea repartiţiei în jurul punctului P trebuie să acceptăm existenţa unui vector $\mathbf{n}$ similar timpului însă a cărui semnificaţie fizică poate fi diferită [17, § 39]. Cu ajutorul vectorului $\mathbf{n}$ se poate introduce un invariant $I(\mathbf{n}, X - x)$ şi o distanţă pozitiv definită R dată prin

$$R = + \sqrt{2(\mathbf{n}, X - x)^2 - s^2} \geqslant 0 \tag{7}$$

Repartiţia dW poate fi considerată ca funcţie de această distanţă adică să avem

$$dW(X - x, \mathbf{n}) = w\left(\frac{R}{a}\right)\frac{d^4x}{a^4}$$

Această repartiţie poate fi concentrată în jurul punctului $X(P)$ şi poate să dea valori mărginite pentru abaterea medie pătratică

$$\overline{\Delta x^2} = \int (X - x)^2 w\left(\frac{R}{a}\right)\frac{d^4x}{a^4} \approx a^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducerea în formula lui dW a vectorului $\mathbf{n}$ implică anumite probleme privind alegerea semnificației sale. Se arată că în cazul cînd semnificația lui $\mathbf{n}$ este legată de mișcarea materiei dispusă în punctele $P(x_1)$ și $P(x_2)$ a căror apropiere se dorește a se defini (cînd acest vector $\mathbf{n}$ se numește interior) acest vector este legat de sistemul de referință al observatorului, el coincizînd cu direcția liniei universale a acestui observator. Operația de mediere a mărimilor fizice depinzînd de coordonatele stocastice x ale punctului universal P va depinde de observator. De exemplu, dacă $F(x)$ este o mărime fizică ce depinde de variabila stocastică $x = X - \xi$, valoarea medie a valorilor sale experimentale va fi

$$\bar{F}(X) = \overline{F(x)} = \int F(X + \xi)\, w(\xi, \mathbf{n})\, d^4\xi = \int \tilde{F}(Q) e^{iQX} \tilde{w}(Q, \mathbf{n})\, d^4Q$$

unde $\tilde{F}(Q)$ este transformata Fourier a lui $F(x)$, $\tilde{w}(Q, \mathbf{n})$ transformata Fourier a densității plane $w(\xi, \mathbf{n})$. Vectorul $\mathbf{n}$ pentru fiecare observator are componentele $\mathbf{n} = (1, 0, 0, 0)$. Prin urmare mărimea $\tilde{w}(Q, \mathbf{n})$ nu este invariantă prin trecerea de la un sistem de referință la altul. În adevăr, aceasta rezultă și din considerațiile fizice de următorul tip: dacă $F(x)$ este o undă plană într-un sistem de referință se poate avea frecvența ω astfel încît $\omega \mathbf{a} \ll 1$ ($\mathbf{a}$ fiind dispersia coordonatei stocastice x), așa că valoarea medie $\bar{F}(X)$ practic nu diferă de valoarea adevărată $F(x)$. În sistemul de referință al acestui observator, din cauza efectului Doppler, $\omega \mathbf{a}$ poate fi mai mare sau egal cu 1 și deci $|\bar{F}(X)| \ll |F(x)|$.

Într-o altă interpretare a vectorului $\mathbf{n}$ cînd se poate identifica cu viteza 4-dimensională, variabila ξ descrie structura internă a particulei.

O altă cale de evitare a dificultăților legate de cerința de invarianță și normalizare a probabilităților anumitor valori ale intervalului s^2 este propusă de D. I. Blokhintsev în [19] introducînd stocasticitatea cu ajutorul unui raport a două spații, metrica definindu-se mai tîrziu. În acest fel stocasticitatea apare explicit prin intermediul unor parametri aleatori ξ a căror semnificație fizică poate fi diferită. Cerințele de invarianță și normalitate ale repartiției dW devin, în acest caz, o problemă particulară.

Să amintim pe scurt calea propusă în [19] prin considerarea a două spații 4-dimensionale $\mathbf{R}^4(x)$ și $\mathbf{R}^4(\xi)$, a unei reprezentări a lui $\mathbf{R}^4(\xi)$ pe $\mathbf{R}^4(x)$

$$x_\alpha = X_\alpha(\xi, \zeta). \tag{8}$$

depinzînd de un parametru ζ care este o cantitate aleatoare. Se poate considera și o familie $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$, finită sau nu ($N \to \infty$) iar dependența de ζ putînd fi funcțională (cînd se obișnuiește să se noteze prin $x_\alpha = X_\alpha(\xi, \{\zeta\})$). Se presupune că există o repartiție normalizată $d_w(\zeta)$ iar spațiul $\mathbf{R}^4(x)$ se numește *spațiul stocastic relativ la spațiul* $\mathbf{R}^4(\zeta)$.

Se introduce noțiunea de reper de referință ca fiind domeniul $Y(\xi)$ în interiorul căruia transformarea (8) este independentă de parametrii aleatori, adică avem $\dfrac{\partial X\alpha(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} = 0$, $\xi \in Y(\xi)$. Presupunînd că în $\mathbf{R}^4(\xi)$ este dată metrica Riemann $d\sigma^2 = g_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi_\alpha\, d\xi_\beta$, aceasta induce o metrică stocastică în spațiul $\mathbf{R}^4(x)$

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}(x, \zeta)\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

nde

$$G_{\alpha\beta}(x, \zeta) = g_{\mu\nu}(\xi) \frac{\partial \xi_\mu(x, \zeta)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi_\nu(x, \zeta)}{\partial x_\beta} \tag{10}$$

iar coordonatele ξ în $g_{\mu\nu}(\xi)$ sînt exprimate prin x și ζ cu ajutorul transformării invariante amintite mai sus. Din (10) rezultă că intervalul în spațiul $\mathbf{R}^4(x)$ devine o mărime stocastică.

Formula (9) ne permite să considerăm spațiul metric stocastic $\mathbf{R}^4(x)$ fără referire la un alt spațiu $\mathbf{R}^4(\xi)$ în ipoteza că metrica sa este definită prin relația (9) independent de (10).

O teorie interesantă a cîmpului în spații stocastice și exemple de spații stocastice sînt obiectul investigațiilor din [20], [19]. Împărtășind ideea exprimată de D. I. Blokhintsev subliniem utilitatea dezvoltării unei teorii a structurilor probabiliste cu metrică nedefinită care să ofere modele mai fidele diferitelor fenomene ale microcosmosului.

§ 4. APLICAȚII ALE STRUCTURILOR PROBABILISTE ÎN PSIHOLOGIE, TEORIA ERORILOR DE MĂSURARE ȘI TEORIA FIABILITĂȚII

Previziunea lui Menger formulată încă de la inițierea abordării statistice a spațiilor metrice cu privire la aplicațiile lor în psihometrie și în modelarea unor teorii privind erorile de măsurare, a devenit o realitate nu numai prin exemplele și ideile sugerate de el [167], [170], [172], [174] ci și prin lucrări mai recente cum sînt [162], [141] [142], [166], [116], [118]. De asemenea rezultatele privind aleatorizarea teoriei generalizate a informației și a teoriei statisticii informaționale, dezvoltată de O. Onicescu [200], [203], [204], oferă căi noi de aplicare a acestora în economie, sociologie, psihologie și pedagogie.

Vom prezenta pe scurt o idee privind aplicarea structurilor probabiliste în modelarea difuziei memoriei perceptuale și vom formula cîteva idei privind aplicabilitatea PM-spațiilor în măsurarea unor entități folosite în studiul anumitor activități biologice și studiul unor probleme privind fiabilitatea elementelor sau sistemelor.

În studiul difuziei memoriei perceptuale, modelarea probabilistă a căpătat un loc important [162], [141], [142]. Unul dintre modele folosite a fost acela care privește discernabilitatea valorii unui stimul la un moment dat, care se compară cu a unui stimul observat după un interval de timp. Avantajul modelului generalizat în [162] față de cel dat în [141] constă în determinarea unor interconexiuni numite „proprietăți observabile" ale datelor experimentale care pot fi extinse și la alte modele. Să presupunem că este dată o mulțime de stimuli X, fiecare dintre stimulii $x \in X$ avînd o aceeași durată finită, se convine ca fiecare experimentare să fie de tipul $\langle v, t, w\rangle$ prin care înțelegem că la momentul r s-a prezentat stimulul v care este urmat de stimulul w la momentul $r+t \geqslant 0$. Dacă w încheie încercarea subiectul răspunde fie că v și w sînt „aceiași" fie că sînt „diferiți", raționamentul său bazîndu-se pe un anumit aspect al stimulilor, altul decît momentul apariției lor. Se efectuează o serie de experiențe pentru cazul cînd X este formată din două elemente x, y și același interval de timp t. Prin urmare, sînt posibile următoarele situații: $\langle x, t, x\rangle$, $\langle y, t, y\rangle$, $\langle x, t, y\rangle$ și $\langle y, t, x\rangle$ cu răspunsul corect „aceiași" în primele două situații și „diferiți" în ultimele două. Vom nota prin $P_{vw}(t)$ probabilitatea de apariție a răspunsului „aceiași" la

situația $\langle v, t, w\rangle$, $v, w \in \{x, y\}$ și vom presupune că $P_{vw}(t) = P_{wv}(t)$ pentru orice $v, w \in \{x, y\}$. Prin $(a, b) \in [x, y: t]$ vom nota evenimentul că mulțimea valorilor $a = P_{xx}(t) = P_{yy}(t)$, $b = P_{xy}(t) = P_{yx}(t)$ este compatibilă cu teoria propusă asupra experiențelor.

Fie

(1) $\qquad (a, b) \in [x, y: r],\ (c, d) \in [y, z: s],\ (e, f) \in [x, y: t]$

rezultatele unor experiențe cu mulțimi diferite de stimuli și intervale de timp diferite. Pornind de la modelul lui Kinchla [142] este natural să ne punem problema unor conexiuni ce pot exista între diferite rezultate și să acceptăm că dacă relația (1) are loc pentru $t \geqslant (r^{1/2} + s^{1/2})^2$ atunci sau $e \leqslant \max\{a, c\}$ sau $f \geqslant \min\{b, d\}$ adică performanța subiectului în experiența $[x, z: (r^{1/2} + s^{1/2})^2]$ nu poate fi simultan mai bună decît performanțele sale în experiențele $[x, y: r]$ și $[y, z: s]$. Dacă x și z sînt mai asemănători decît x și y ne așteptăm ca performanța în experiența $[x, z: (r^{1/2} + s^{1/2})^2]$ să fie inferioară celei din experiența $[x, y: r]$. Sensul condiției de mai sus este acela că chiar dacă x, z sînt mai puțin asemănători decît x cu y sau y cu z, este încă posibil să alegem intervale de timp (mici) între componente care să compenseze descreșterea în similaritate.

De altfel ideea lui A. Marley a fost de a apropia modelul de cel al PM-spațiilor dînd și o versiune multidimensională a modelului din [142]. Astfel, dacă se consideră $X = \{x, y\}$ și $z, w \in \{x, y\}$ repetînd prezentarea $\langle z, t, w\rangle$ se obține o variabilă aleatoare sau o repartiție multidimensională asociată scărilor interne ale lui z și w precum și o repartiție a erorilor la intervalul de timp t. La fiecare încercare subiectul reține o anumită stare asociată lui z în acea încercare care la rîndul ei este denaturată, după un timp t, de către influența factorilor ce induc erori și valoarea finală după timpul t este comparată cu valoarea de intrare asociată lui w. Dacă distanța dintre acești termeni este mai mică decît o constantă α subiectul răspunde „aceiași" iar în caz contrar răspunde „diferiți". Dacă presupunem că variabilele de intrare sînt normale multidimensionale și că influența factorilor ce atrag erori are loc după tipul unui proces de difuzie [141] vom obține că pentru fiecare $x, y \in X$ și $t \geqslant 0$, dacă $(a, b) \in [x, y: t]$, atunci există o constantă α astfel încît să avem

$$a = P(\{\|U_x + T_t - U_x\| < \alpha\})$$

$$b = P(\{\|U_x + T_t - U_y\| < \alpha\})$$

unde $\|\cdot\|$ este norma euclidiană din $\mathbf{R}^n$ și

1a) pentru fiecare $t > 0$, T_t este o repartiție normală n-dimensională de tipul $N(0, (\Phi t)^{1/2} I)$, $\Phi > 0$,

1b) pentru $t = 0$, $T_t = 0$ și

2a) pentru orice $z \in X$, U_z este o repartiție normală n-dimensională de tipul $N(\mathbf{u}_z, \varphi I)$, $\varphi > 0$ sau

2b) pentru orice $z \in X$, U_z este concentrată în $\mathbf{u}_z$.

Se constată că pentru $n = 1$ se obține modelul din [141], [142]. Dacă pentru orice $u, w \in X$ și $h, \alpha, t \geqslant 0$ notăm prin

(i) $$h_t(v, w) = \frac{\|\mathbf{u}_v - \mathbf{u}_w\|}{(\Phi t + 2\varphi^2)^{1/2}} \quad \text{dacă} \quad \varphi > 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

și

(ii) $I(h, \alpha) = \int_{\|u-h\|<\alpha} g(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}$, unde $g(\mathbf{u})$ este de tipul $N(0, I)$ și $||\mathbf{h}|| = h$,

se obține, utilizînd raționamente similare cu cele din [237], că dacă $(a, b) \in [x, y: t]$ și are loc 2b) pentru $t=0$, atunci $a = H_0(\alpha)$, $b = H_0(\alpha - \|\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y\|)$ iar în caz contrar există $\alpha' \geqslant 0$ astfel încît să avem $a = I(0, \alpha')$, $b = I(h_t(x, y), \alpha')$ unde de fapt $\alpha' = \alpha/(\Phi t + 2\varphi^2)^{1/2}$.

Să schițăm acum justificarea următoarei afirmații: „există o constantă $\delta \geqslant 0$ astfel că pentru fiecare $x, y, z \in X$ și $r, s \geqslant 0$ astfel încît $(a, b) \in [x, y: r]$, $(c, d) \in [y, z: s]$ și $(e, f) \in [x, z: g(r, s)]$ unde $g(r, s) = [(r+\delta)^2 + (s+\delta)^2]^{1/2} - \delta$ atunci avem că sau $e \leqslant \max\{a, c\}$ sau $f \geqslant \min\{b, d\}$".

În adevăr, dacă ne referim la cazul nesingular și presupunem îndeplinite ipotezele din afirmație, atunci se pot determina α, γ, β astfel încît să avem

$$a = I(0, \alpha),\ b = I(h_r(x, y),\ \alpha)$$

$$c = I(0, \beta),\ d = I(h_s(y, z),\ \beta)$$

$$e = I(0, \gamma),\ f = I(h_{g(r,s)}(x, y),\ \gamma)$$

Se verifică ușor că $I(q, c) \geqslant I(q', c)$ dacă $q \leqslant q'$ și că $h_{g(r,s)}(x, z) \leqslant \max\{h_r(x, y), h_s(y, z)\}$. Dacă presupunem că $e > \max\{a, c\}$ atunci $\gamma > \max\{\alpha, \beta\}$ și $f \geqslant \min I(h_r(x, y), \gamma), I(h_s(y, z), \gamma) > \min\{I(h_r(x, y), \alpha), I(h_s(y, z), \beta)\} = \min\{b, d\}$, adică sau $e \leqslant \max\{a, c\}$ sau $f \geqslant \min\{b, d\}$.

Evident că parametrul $\delta \geqslant 0$ se poate estima iar în cazul $\delta = 0$ rezultă din modelul lui Kinchla că afirmația este corectă.

Afirmația de mai sus poate fi generalizată considerînd funcțiile $g: [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ și $T_i: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, $i = 0, 1$, astfel încît dacă $(a, b) \in [x, y: r]$, $(c, d) \in [y, z: s]$ și $(e, f) \in [x, z: g(r, s)]$ atunci sau $e \leqslant T_0(a, c)$ sau $f \geqslant T_1(a, b)$. Evident că asimilînd pe T_0 și T_1 cu t-norme sau t-conorme de diferite tipuri se obțin rezultate în care proprietățile observabile se formulează în acest limbaj.

În [162] se dă și o cale de a testa afirmații de tipul amintit și se subliniază că ideea studierii unor modele cu ajutorul „proprietăților observabile" poate oferi un nou mijloc de comparare a eficienței sau fidelității modelelor utilizate în psihologie.

Un alt domeniu promițător în care modelarea probabilistă și în special utilizarea structurilor probabiliste își pot dovedi utilitatea, este cel a biologiei și chimiei. Astfel că metoda Monte Carlo îmbinată cu unele rezultate de topologie probabilistă oferă o cale eficientă pentru evaluarea sumei volumelor ce nu se acoperă între o moleculă M dată și un standard S care se potrivește perfect în situsul receptor care provoacă o activitate biologică anumită. Unele încercări utilizînd metoda Monte Carlo și metrici clasice au fost efectuate deja și apreciem că folosirea metricilor probabiliste va conduce la rezultate mai bune.

Cu privire la utilizarea structurilor probabiliste în teoria matematică a fiabilității se propune [118] o analiză a stării funcționale a unui element p prevăzut în componența unui dispozitiv și a unui element q prevăzut să intre în sarcină numai la scăderea anumitor caracteristici ale elementului p, cu ajutorul unei aplicații f, definită pe mulțimea componentelor dispozitivului și a rezervei sale. Deci dacă f se interpretează ca transformare a lui S în S (mulțimea elementelor componente și a celor de rezervă asupra cărora sînt

Scanned with OKEN Scanner

posibile evidențierile rezultatelor unor măsurători permanente) deci ca și rezultat al angajării în sarcină într-un interval de timp t. Se poate valorifica teoria privind contracțiile probabiliste. În adevăr, dacă prin f se notează efectul funcționării în timp a elementului p și eventualitatea înlocuirii sale cu elementul de rezervă q, vom avea că probabilitatea ca într-un interval de timp $(0, t_0)$ elementele p și q să-și modifice parametrii funcționali, este mai mică decît probabilitatea ca în intervalul de timp $(0, kt_0)$ elementele $f(p)$ și $f(q)$ să-și modifice parametrii funcționali. Obținem, prin alegerea diferitelor variante de construcție a dispozitivului, o clasă $\mathcal{C}$ de contracții probabiliste. O situație similară poate fi și în cazul rezervării cu mai multe elemente.

Din punct de vedere practic existența unui punct fix pentru f înseamnă asigurarea funcționării dispozitivului la parametrii admisibili în ceea ce privește atribuțiile elementului p împreună cu rezerva prevăzută în schemă. Pentru justificarea existenței punctului fix se asociază un spațiu Menger nearhimedian ale cărui puncte sînt diferite stări sesizate de aparatele de măsură în intervale de timp date.

O altă modelare a problemei autoreglării prin utilizarea rezervării o oferă calea de a concepe apariția unei defecțiuni care declanșează o serie de alte defecțiuni, ca un proces aleator ramificabil cu o mulțime finită de stări. Notînd cu $p(k)$ probabilitatea ca în prima generație de defecțiuni să apară k defecțiuni $(p(1) > 0)$ iar prin $p_{10}^{(n)}$ probabilitatea ca după n generații sistemul să treacă din starea cu un defect în starea cu nici un defect, problema se reduce la determinarea celei mai mici rădăcini nenegative a ecuației $G(z) = z$, G fiind funcția generatoare a variabilei aleatoare ce dă numărul de defecțiuni cauzate de o defecțiune dată.

Desigur că posibilitățile aplicării în practică ale analizei probabiliste sînt destul de largi și sînt de așteptat rezultate mai eficiente în viitor, cantitatea și calitatea cercetărilor și rezultatelor fiind într-o continuă ascensiune.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. N. H. ABEL, *Untersuchungen der Funktionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen x and y wie f(x, y), welche die Eigenschaft haben, daß f(z, f(x, y)) eine symmetrische Funktion von x, y und z ist*, J. Reine Angew. Math., *1* (1826), 11—15.
2. J. ACZÉL, *Sur les opérations définis pour nombres réels*, Bull. Soc. Math. France, 76(1949), 59—64.
3. A. APPERT and KY-FAN, *Espaces topologiques intermédiaires*, Actual Sci. Ind., 1121, Paris, 1951.
4. V. I. ARNOLD, *O funcțiah treh peremenih*, D.A.N., 114(1957), 679—81.
5. —, *Concerning the representability of functions of two variables in the form*: $\chi[\Phi(x) + \Psi(y)]$. Uspehi Mat. Nauk **12**, 2, (74), 1957, 119—121.
6. N. K. BARI, *Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues*, Math. Ann., *103* (1930), 145—248; 598—653.
7. L. A. BASSALÎGO, *O prestavlenii neprerîvnîh funkții dvuh peremenîh pri pomoșci neprerîvnîh funkții odnogo peremenogo*, Vestn. M.G.U., *1* (1966).
8. R. BELLMAN, R. KALABA and L. ZADEH, *Abstraction and Pattern Classification*, J. Math. Anal. Appl., *13*(1966), 1—7.
9. H. BERGSTRÖM, *Limit Theorems for Convolutions*, Almqvist Wiksell, Stockholm, 1963.
10. C. BESSAGA, *On the converse of the Banach „fixed-point principle"*, Colloq. Math., *7*(1959), 41—43.
11. A. T. BHARUCHA-REID, *On random solutions of integral equations in Banach spaces*, Trans. 2nd Prague Conf. on Information Theory, Statist. Decision Functions and Random Processes, 1959, 27—41.
12. —, *On the theory of random equations*, Proc. Symp. Appl. Math. 16th (1963), 40—69, Amer. Math. Soc., Providence, 1964.
13. —, *Random Integral Equations*, Academic Press, 1972.
14. —, *Fixed point theorems in probabilistic analysis*. Bull. Amer. Math. Soc., *82*(1976), 641—657.
15. P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probabilisty Measures*, New York, 1968.
16. N. H. BINGHAM, *Factorization theory and domains of attraction for generalized convolution algebras*. Proc. London Math. Soc., *23* (3), (1971), 16—30.
17. D. I. BLOKHINTSEV, *Space and Time in time Microworld*. Moscow, 1970.
18. —, *The Stochastic Spaces*, Comm. of the Joint Inst. for Nuclear Research, Dubna, E2—5922, 1971.
19. —, *Stochastic Spaces*, Comm. of the Joint Inst. for Nuclear Research, Dubna, E2-6566, 1972.
20. —, *Geometry and Physics of the microworld*, Comm. Inst. for Nuclear Research, Dubna, E2-6653 1972.
21. GH. BOCȘAN, GH. CONSTANTIN, *The Kuratowski function and some applications to the probabilistic metric spaces*. Atti Accad. Naz. Lincei, LV, 3—4, 1973, 236—240.
22. GH. BOCȘAN, *On the Kuratowski's function in random normed spaces*, Seminarul de spații metrice probabiliste, Univ. Timișoara, *8*(1974), 13 p.
23. —, *Some remarks on a measure of noncompactness in probabilistic metric spaces*. Seminarul de spații metrice probabiliste, Univ. Timișoara, *18*(1974), 6 p.
24. —, *On some fixed point theorems in probabilistic metric spaces*, Math. Balkanica, 4,*11* (1974), 67—70.
25. —, *A computational formula of Kuratowski function and applications to random normed spaces*, Seminarul de spații metrice probabiliste, Univ. Timișoara, *31* (1975), 11 p.
26. —, *Sur certaines seminormes aleatoires et applications*. C. R. Acad. Sci., Paris, 1976.
27. —, *Măsuri aleatoare de necompacitate și aplicații*. Teză de doctorat, Univ. Timișoara, 1976.
28. F. F. BONSALL, *Lectures on some fixed-point theorems of functional analysis*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1962.

Scanned with OKEN Scanner

29. R. BOSE, On the exact distribution and moment-coefficients of the D^2-statistic, Sankhya, 2 (1936), 143—154.
30. M. BORN, *Continuity, Determinism and Reality*. Kgl. Danske Videnskb. Selskb. Mat. fys. Medd., **30**, 2 (1955).
31. N. BOURBAKI, *Les structures fondamentales de l'analyse*. Livre V, Espaces Vectoriels Topologiques, Herman, Paris.
32. W. E. BOYCE, *Random eigenvalue problems, in probabilistic methods in applied mathematics*. Vol. I, Academic Press, 1968, 1—73.
33. L. de BROGLIE, *Une remarque sur l'interactions entre la matière et la champ électromagnétique*. C. R. Acad. Sci., Paris, 200 (1935), 361—363.
34. L. E. BROUWER, *Die Theorie der endlichen kontinuerlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie*. Math. Ann., *67* (1909), 127—136.
35. J. B. BROWN, *Stochastic metrics*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., *24* (1972), 49—62.
36. —, *On the relationship between Menger spaces and Wald spaces*, Colloq. Math., *27*(1973), 323—330.
37. E. M. CABANA, *Stochastic integration in separable Hilbert spaces*. Publ. Inst. Mat. Estadist. Montevideo *4*(1966), 49—80.
38. R. CACCIOPPOLI, *L'equazione funzionale* $f(x + y) = F(f(x), f(y))$. Giorn. Math. Battaglini, *66*(1928), 69—74.
39. G. L. CAIN and R. H. KASRIEL, *Fixed and periodic points of local contraction mappings on probabilistic metric spaces*. Math. Syst. Theory, *9*(1976), 289—297.
40. P. CALABRESE, *Triangle inequalities in statistical metric spaces*. Ph. D. thesis, I11. Inst. of Techn., 1968.
41. —, *A random variable aproach to probabilistic metric spaces* (to appear).
42. E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'analyse Situs*. Mem. Sci. Math., *42*(1930).
43. N. G. CEBOTAREV, *K probleme rezolvent*. Uc. Zap. Kazansk, Univ. **114**, *2*(1954), 189—193.
44. E. CECH, *Topological spaces*, Publ. House Czech. Ac. Sci., Prague, 1966.
45. R. CHILEWSKI, *On the random metric spaces of Serstnev*. M. S. thesis, I11. Inst. of Techn., 1968.
46. L. B. ČIRIĆ, *On fixed points of generalized contractions on probabilistic metric spaces*. Publ. Inst. Math. *18*(32), (1975), 71—78.
47. G. CIUCU, *Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1963.
48. G. CIUCU și R. THEODORESCU, *Procese cu legături complete*, Edit. Academiei R.P.R., București, 1960.
49. GH. CONSTANTIN, *Proprietăți spectrale și de structură pentru anumite clase de operatori liniari pe spații normate*, teză de doctorat, Universitatea București, 1972.
50. —, *Some spectral properties for the locally* α*-contraction operators*. Boll. Unione Math, Ital., **4**, *6*(1972), 323—330.
51. GH. CONSTANTIN, e V. RADU, *Random-proximal spaces*, Atti Accad. Naz. Lincei, LVI, *5*(1974), 703—706.
52. GH. CONSTANTIN and GH. BOCȘAN, *On some measures of noncompactness in probabilistic metric spaces*. Seminarul de spații metrice probabiliste, Univ. din Timișoara *11*(1974), 8 p.
53. GH. CONSTANTIN, *Asupra unor aplicații ale normelor aleatoare în teoria informației*, Comunicare ses. șt. Univ. Timișoara, 1977.
54. GH. CONSTANTIN, *Idei și rezultate în teoria spațiilor metrice probabiliste*. Expunere în Seminarul de spații metrice probabiliste, Univ. Timișoara, 1977.
55. GH. CONSTANTIN și I. ISTRĂȚESCU, *Structuri și reprezentări funcționale cu aplicații*. Monografii matematice, Univ. Timișoara, (va apare).
56. GH. CONSTANTIN, *Asupra unor topologii pe spații normate probabiliste*, Comunic. ses. șt. Univ. Timișoara, 1978.
57. GH. CONSTANTIN și I. ISTRĂȚESCU, *Elemente de topologie probabilistă și aplicații*. Monografii matematice, Univ. Timișoara (va apare).
58. H. CRAMÉR, *Uber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion*, Math. Z., *41*(1936), 405—414.
59. G. DALL'AGLIO, *Sulla compatibilita delle funzioni di ripartizione doppia*. Rendiconti Mat. *18*(1959), 385—413.
60. R. DAVIDSON, *Arthmetic and other properties of certain delphic semigroupes I, II*. Z. Wahrs.h. und verw. Geb. *10*(1968), 120—145, 146—172; More Delphic theory and practice, *13*(1969), 191—203.
61. J. L. DOOB, *Probability in function spaces*. Bull. Amer. Math-Soc., *52*(1947), 15—30.
62. M. DRIML and O. HANS, *Continuous stochastic approximations*. Trans. 2nd Prague Conf. on Information Theory, Statist. Decision Functions and Random Processes, 1959, 113—122

Scanned with OKEN Scanner

63. C. A. DROSSOS, *Stochastic Menger spaces and convergence in probability*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **XXII**, *8*(1977), 1069—76.
64. D. DUGUÉ, *Sur certains exemples de décomposition en arithmétique des lois des probabilités*. Ann. Inst. H. Poincaré, *12*(1951), 159—171.
65. —, *Arithmétique des lois des probabilités*, Paris, 1957.
66. D. DUGUÉ, R. A. FISCHER, *Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois des probabilités*. C. R. Acad. Sci., Paris, *227*(1948), 1205—1207.
67. C. DUMITRESCU, *Spaţii probabiliste de proximitate*. St. cerc. mat., *26*(1974), 737—43.
68. R. J. EGBERT, *Products and quotients of probabilistic metric spaces*, Ph. D. thesis, Univ. of Arizona, 1966.
69. —, *Products and quotients of probabilistic metric spaces*, Pacific J. Math., *24*(1968), 437—55.
70. T. ERBER, H. G. LATAL and B. N. HARMON, *The origin of hysteresis in simple magnetic systems*. Advances in Chemical Physics, **V**, *20* (1971), 71—134.
71. T. ERBER, B. SCHWEIZER and A SKLAR, *Probabilistic metric spaces and hysteresis systems*. Comm. Math. Phys., *20* (1971), 205—219.
72. T. ERBER, S. A. GURALNICK and H. G. LATAL, *A general phenomenology of hysteresis*. Ann. Phys., *69*(1972), 116—192.
73. T. ERBER, B. SCHWEIZER and A. SKLAR, *Mixing transformations on metric spaces*. Comm. Math. Phys., *29*(1973), 311—317.
74. T. ERBER and A. SKLAR, *Macroscopic irreversibility as a manifestation of micro-instabilities*. In „Modern Developments in Termodynamics", Israel Univ. Press, Jerusalem, 1974.
75. W. M. FAUCETT, *Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents*. Proc. Amer. Math. Soc., *6*(1955), 741—747.
76. R. FÉRON, *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*. Publ. Inst. Statistique Univ. Paris, *5*(1956), 1—12.
77. Z. FIEDOROWICZ, *A comparison of two naturally arising uniformities on a class of pseudo-PM spaces*. Pacific J. Math., *34*(1970), 51—60.
78. B. FORTE, *Information and probability*. Symposia Math. *9*(1972), 121—9.
79. M. J. FRANK, *Associative operators on spaces of distribution functions*. Ph. D. thesis, Ill, Inst. of Techn., 1972.
80. —, *Probabilistic topological spaces*. J. Math. Anal. and Appl. *34*(1971), 67—81.
81. —, *Associativity in a class of operators on a space of distribution functions*. Aeq. Math., *12* (1975), 121—144.
82. M. FRÉCHET, *Sur les tableaux de correlation dont les marges sont données*. Ann. Univ. Lyon., *9*(1951), 53—77.
83. B. L. FRIDMAN, *Uluçsenie gladkosti funckţii v teoreme A. N. Kolmogorova o superpoziţiah*. D.A.N.SSSR, *177*(1967), 1019—1022.
84. R. T. FRITSCHE, *Topologies for probabilistic metric spaces*. Ph. D. thesis, Univ. of Arizona, 1967.
85. —, *Topologies for probabilistic metric spaces*. Fundamenta Math. *72*(1971), 7—16.
86. C. A. GARDNER, *Stochastic approximation and its application to prediction and control*. Internat. Symp. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Academic Press, N.Y., 1963.
87. D. GHIŞA, *Probabilistic Harnack metric*. Bull. Math. Soc. Sci. R.S.R., *17*(69), 2(1973), 189—191.
88. U. GRENANDER, *Probabilities on algebraic structures*. Wiley, N.Y., 1963.
89. O. HADZIĆ, *Probabilistic proof of a fixed point theorem in K-convex linear topological spaces*. Review of Research Faculty of Sci. Univ. of Novi-Sad, *7*(1977), 3—7.
90. —, *A fixed point teorem in a random normed spaces*. Review of Research Faculty of Sci. Univ. of Novi-Sad, *7*(1977), 23—27.
91. P. R. HALMOS, *Lectures on ergodic theory*. N.Y., Chelsea, 1956.
92. O. HANŠ, *Reduzierende zufallige Transformationen*. Czech. Math. J., *7*(1957), 154—158.
93. O. HANŠ, *Generalized random variables*. Trans. 1st Prague Conf. on Information Theory, Statist. Decision Functions and Random Processes, 1956, 61—103; ibid Random fixed point theorems, 105—125.
94. — *Random operator equations*. Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probability, Vol. II, 1960, 185—202.
95. O. HANŠ and A. ŠPAČEK, *Random fixed point approximation by differentiable trajectories*. Trans. 2nd Prague Conf. Information Theory, Statist. Decision Functions and Random Processes, 1959, 203—213.
96. T. HEDBERG, *The Kolmogorov superposition theorem*. Apendix II to "Topics in Approximation Theory" by H. S. Shapiro, Lectures Notes in Math., Vol. 187(1971), 267—76.
97. G. M. HENKIN, *O lineinîh superpoziţiah neprerîvnovo differenţiruemîh funcţii*. D.A.N., **157**, *2*(1964), 288—90; ibid: O vlojenii prostranstva *s*-gladkih funcţii *n* peremenîh v prostranstvo dostatocino gladkih funcţii menşego cisla peremenîh, **153**, *1*(1963), 57—60

Scanned with OKEN Scanner

133. R. KANNAN and H. SALEHI, *Mesurabilité du point fixe d'une transformation aléatoire séparable*. C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. A-B *281*(1975), A663-A664; *Random nonlinear equations and monotonic nonlinearities*. J. Math. Anal. Appl., 57, *1*(1977), 234—256.
134. S. KARLIN, *A first course in stochastic processes*. N.Y., Academic Press, 1969.
135. D. G. KENDALL, *Delphic semigroups*. Bull. Amer. Math. Soc., *73*(1967), 120—121.
136. D. G. KENDALL, *Delphic semigroups, infinitely divisible, regenerative phenomena and the Aritmetic of p-functions*. Z. Wahrs. und verw. Geb., *14*(1968), 163—195.
137. C. H. KIMBERLING, *Associative functions and an application to exchangeable stochastic processes*. Ph. D. thesis, I11. Inst. of Techn., 1970.
138. —, *Exchangeable events and completely monotonic sequences*. Rocky Mountain J. Math., *3*(1973), 565—74.
139. —, *On a classs of associative functions*. Publ. Math., Debrecen, *20*(1973), 21—39.
140. —, *A probabilistic interpretation of complete monotonicity*. Aeq. Math. *10*(1974), 152—64.
141. R. A. KINCHLA and F. A. SMYZER, *A diffusion model of perceptual memory*. Perception and Psychophysics, 2(1967), 219—29.
142. R. A. KINCHLA and G. ALLAN, *A theory of visual movement perception*. Psychological Review, *76*(1969), 537—58.
143. J. F. KINGMAN, *Metrics for Wald spaces*. J. Londom Math. Soc., *39*(1964), 129—130.
144. A. N. KOLMOGOROV, Foundations of the theory of probability, Chelsea N.Y., 1956.
145. —, *O prestavlenii neprerîvnîh funcţii nescolkih peremenîh superpoziţiami neprerîvnîh funcţii menşego cisla peremenîh*. D.A.N., *108*(1956), 179—182.
146. —, *O prestavlenii neprerîvnîh funcţii nescolkih peremenîh v vida superpoziţii neprerîvnîh funcţii odnogo peremenogo i slojenia*. D.A.N., *114*(1957), 953—56.
147. K. KURATOWSKI, *Sur les espaces completes*. Fundamenta Math. *15*(1930), 301—309.
148. I. KUROSAKI, *A note on statistical metric spaces*. Proc. Japan Acad., *40*(1964), 396—99.
149. A LEONTE, *Proximitate stocastică*. St. cerc. mat., *26*(1974), 1095—1100.
150. P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1954.
151. C. H. LING, *Representation of associative functions*. Ph. D. thesis, I11. Inst. of Tehn., 1964.
152. —, *Representation of associative functions*. Publ. Math. Debrecen, *12*(1965), 189—212.
153. YU. V. LINNIK, *Decomposition of probability distributions*. Oliver-Boyl, Edinburg-London, 1964.
154. M. LOÈVE, *Probability Theory*. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1963.
155. E. LORCH, H. TONG, *Compactness, metrizability and Baire isomorphism*. Acta Sci Math., *35*(1973), 1—6.
156. G. G. LORENTZ, *Approximation of Fonction*. Holt, Rinehart and Winston 1966.
157. —, *Metric entropy, widths and superposition functions*. Amer. Math. Monthly, *69*(1962), 469—85.
158. R. D. LUCE and P. SUPPES, *Preference, utility and subjective probability*. Handbook of Math. Psych., *3*, N.Y., Wiley, 1965, 249—410.
159. W.A. LUXEMBURG, *On the convergence of succesive approximation in the theory for ordinary differential equations*. Indag. Math. 20(1958), 540—46.
160. P. MARCUS, *Probabilistic metric spaces and stochastic processes*. Ph. D. thesis, I11. Inst. of Techn., 1968.
161. —, *Probabilistic metric spaces constructed from stationary Markov chains*. Aeq. Math., *15*(1977), 169—71.
162. A. MARLEY, *An observable property of a generalization of Kinchla's diffusion model of perceptual memory*. J. Math. Psychology, *8*(1971), 481—88.
163. M. S. MATVEICHUK, *Random norms and characteristic probabilisties on orthoprojections associated with factors*. Probabilistic methods and Cybernetics, Kazan Univ., *9*(1971), 73—77.
164. M. S. MATVEICHUK, *O kolţah so sluciainoi normoi*. Veroiatnostnîie metodî i kibernetika, Kazan Univ., *10—11*(1974), 43—50.
165. —, *O idealah v kolţe i izmerimîh operatorov*. Veroiatnostnîie metodî i kibernetika, Kazan Univ., *10—11*(1974), 116—20.
166. D. H. McLAUGHLIN and R. LUCE, *Stochastic transitivity and cancellation of preferences between bitter-sweet solutions*. Psychonomic Science, *2*(1965), 89—90.
167. K. MENGER, *Statistical metrics*. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, *28*(1942), 535—537.
168. —, *The theory of relativity and geometry*. Albert Einstein Philosopher-Scientist, Evanston, I11., 1949.
169. —, *Probabilistic theories of relations*. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, *37*(1951), 178—180.
170. —, *Probabilistic geometry*. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, *37* (1951) 226—229.
171. —, *Ensembles flous et fonctions aléatoires*, C. A. Acad. Sci., Paris, *232*(1951), 2001—2003.
172. —, *Géométrie générale*. Mémorial des Sci. Math., No. 124, 1954, Paris.
173. K. MENGER, B. SCHWEIZER and A. SKLAR, *On probabilistic metrics and numerical metrics with probability 1*. Czech. Math. J., *9*(84), 1959, 459—466.

Scanned with OKEN Scanner

214. YU PROHOROV, *Shodimosti sluciainih proțesov i predelnîie teoremî teorii veroiatnostei.* Teoria Veroiat. i Primenenia 1, *2*(1956).
215. V. RADU, *Linear operators in random normed spaces.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. de la R.S.R., *17*(65), 2(1973), 217—20.
216. —, *On some probabilistic structures on product spaces.* Seminarul de spații metrice probabiliste, Univ. Timișoara, *9*(1974).
217. —, *Nonarchimedean random normed spaces.* Seminarul de matematici aplicate, A. Spații metrice probabiliste, Univ. Timișoara, *14*(1974), 8 p.
218. —, *Sur une norme aléatoire et la continuité des opérateurs dans espaces normés aléatoires.* C. R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1303—1305.
219. —, *Locally convex probabilistic spaces and linear operators.* Sminarul de spații metrice probabiliste, Univ. Timișoara, *22*(1975), 6 p.
220. —, *Equicontinuity, affine mean ergodic theorem and linear equations in random normed spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., *57*(1976) 299—303.
221. —, *Contribuții la studiul unor probleme de analiză funcțională pe spații normate aleatoare.* Teză de doctorat, Univ. Timișoara, 1976.
222. A. RÉNYI, *On a new axiomatic theory of probability.* Acta Math. Sci. Hung., *6*(1955), 285—335.
223. F. RHODES, *Convexity in Wald's statistical metric spaces.* J. London Math. Soc., *39*(1964), 117—28.
224. R. E. RICE, *On mixing transformations.* Aeq. Math., *17*(1978), 104—108.
225. N. ROSEN, *Statistical geometry and fundamental particle,* Phys. Rev. *72*(1947), 298—303; Quatum geometry, Ann. of Phys., *19*(1962), 165—172.
226. A. SALESKI, *Entropy of self-homeomorphisms of statistical pseudometric spaces.* Pacific J. Math., *51*(1974), 537—42.
227. —, *A conditional entropy for the space of pseudo-Menger mapps.* Pacific J. Math., *59*(1975), 525—33.
228. *Entropy, Capacity and Hausdorff dimension of sets in statistical metric spaces.* (preprint).
229. I. SĂCUIU et al., *Fixed point theorems for contraction mappings on probabilistic metric spaces.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., *18* (1973), 1375—80.
230. G. SÂMBOAN et al., *Random uniform structures.* Com. Acad. R. P. Române, *11*(1961), 1311—13; Statistical spaces, Rev. Math. Pures Appl., *7*(1962), 699—703.
231. G. SÂMBOAN, *Spații metrice statistice.* St. cerc. mat., *28*(1976), 365—68.
232. B. SCHWEIZER and A. SKLAR. *Espaces métriques aléatoires.* C. R. Acad. Sci., Paris, *247*(1958), 2092—2094.
233. —, *Statistical metric spaces.* Pacific J. Math., *10*(1960), 313—334.
234. B. SCHWEIZER, A. SKLAR and E. THORP, The metrization of statistical metric spaces. Pacific J. Math., *10*(1960), 673—75.
235. B. SCHWEIZER and A. SKLAR, *Associative functions and statistical triangle inequalities.* Publ. Math., Debrecen, *8*(1961), 169—86.
236. —, *Topology and Tchebycheff.* Amer. Math. Monthly, *68*(1961), 760—62.
237. —, *Statistical metric spaces arising from sets of random variables in Euclidean n-space.* Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya, *7*(1962), 456—65.
238. —, *Inequalities for the confluent hypergeometric function,* J. Math. and Physsics, *42*(1963), 329—330.
239. —, *Triangle inequalities in a class of statistical metric spaces.* J. London Math. Soc., *38*(1963), 401—6.
240. —, *Associative functions and abstract semigroups.* Publ. Math., Debrecen, *10*(1963), 69—81.
241. B. SCHWEIZER, *Equivalence relations in probabilistic metric spaces,* Bul. Inst. Polytehn. Iași, *10*(1964), 67—70.
242. —, *Lectures on probabilistic metric spaces.* Lectures Notes, Univ. of Arizona, 1965.
243. —, *On the uniform continuity of the probabilistic distance.* Z. Wahrsch. verw. Geb., *5*(1966), 357—360.
244. —, *Probabilistic metric spaces — the first 25 years.* The New York Statistician, *19*(1967), 3—6.
245. B. SCHWEIZER and A. SKLAR, *Mesures aléatoires de l'information.* C. R. Acad. Sci. Paris, *269*(1969), 721—273.
246. B. SCHWEIZER, *On the convolution of distribution functions.* Amer. Math. Monthly, *77*(1970), 745—46.
247. B. SCHWEIZER and A. SKLAR, *Mesure aléatoire de l'information et mesure de l'information par un ensemble d'observateurs.* C. R. Acad. Sci. Paris, *272*(1971), 149—52.
248. —, *Probabilistic metric spaces determined by a measure-preserving transformations.* Z. Wahrsch. verw. Geb. *26*(1973), 235—240.
249. —, *Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables.* Studia Math., *TLII* (1974), 43—52.

Scanned with OKEN Scanner

287. I. VĂDUVA şi a., *Products of statistical metric spaces*. St. şi cerc. mat., *12*(1961),567—74.
288. A. G. VITUŞKIN, *O mnogomernîh variaţiah*, *M. Gostehizdat.*, 1955.
289. —, *K trinadţatoi probleme Hilberta*. D.A.N., *95*(1954), 701—704; *Dokazatelstvo suşcestvovania analiticeskih funcţii mnoghih peremenîh, ne prestavimîh lineinimi superpoziţiami neprerivno differenţiruemîh funcţii menşevo cisla peremenîh*. D.A.N., *156*(1964), 1258—61; *Nekotoriie svoistva lineinîh superpoziţii gladkih funcţii*. D.A.N., *156*(1964), 1003—1006.
290. A.G. VITUŞKIN i G.M. HENKIN, *Lineinîie superpoziţii funcţii*. U.M.N., *22*(1967), 77—124.
291. A. WALD, *On a statistical generalization of metric spaces*. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, *29*(1943), 196—197.
292. M. T. WASAN, *Stochastic approximation*. Cambridge Univ. Press, 1969.
293. H. WEYL, *Symmetry*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1952.
294. N. WIENER, *The Homogeneous Chaos*. Amer. J. Math., *60*(1938), 110—121.
295. A. WIMAN, *Uber die Anwendung der Tschirnhausen-Transformation auf die Reduktion algebraischer, Gleishungen*. Nova Acta R. Soc. Sci. Uppsaliensis, 1927, 3—8.
296. A. F. XAVIER, *On the product of probabilistic metric spaces*. Portugal Math., *27*(1968), 137—147.
297. A. F. XAVIER, T. S. XAVIER, *Equivaléncia e ordem probabilisticas*. Universidade Federal de Ceará, Fortaleza, Ceará, Brasil, 1974.

Scanned with OKEN Scanner

GHEORGHE CONSTANTIN, IOANA ISTRĂȚESCU, *Elemente de analiză probabilistă și aplicații (Elements of probabilistic analysis and applications)*, București, Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1981, 204 p.

ABSTRACT

Probabilistic analysis and especially the random operator theory is one of the most important and recent domains that sets itself the task of contributing to the present development of science and technology. And this, particularly, due to the large possibilities of modelling some highly significant phenomena in quantic physics and electromagnetism, biology, telecommunications, the theory of mixtures, the theory of fluids, psychometry, and others. It is the outcome of the combination of analytic methods and of the probabilistic ones with the most recent instruments of the latter. Great personalities of science have brought their contribution to its creation: H. Poincaré, M. Born, L. de Broglie, H. Weyl, N. Wiener, A. N. Kolmogorov, K. Menger, D. J. Blokhintsev, J. Kampé de Fériet, O. Onicescu, and others.

Basic elements are presented in the light of probabilistic structures and of the theory of operators on these structures or of random operators in which we want to valuate in a new form both random processes and probabilistic functional analysis. Certainly the limited space of this book does not allow of a detailed exposition of all the ideas and results and we hope to further present them in a future monograph.

An exhaustive bibliography is given of almost 300 titles in the domain of random structures, set up with the help of professor B. Schweizer of the University of Massachusetts, one of the basic contributors to the development of the theory of probabilistic metric spaces together with A. Sklar with whom he developed the theory set up by K. Menger.

The first two chapters deal with the theoretical bases of the existence and structure of some classes of semigroups on the real right over the space of the distribution functions using the techniques existing in recent mathematical literature.

The problem of the generation of new t-norms and conorms which are the basis of the formulation of inequality of the triangle necessary to the definition of random metrics is linked to the problem of the representability of functions of n-variables with the help of some functions of less variables.

This point of view allows of an interesting exposition of the results and implications brought by Hilbert's 13th problem. We also appreciate as fruitful the new results concerning the theory of copulas especially linked to the existence of the operations on distribution functions not derivable from operations on random variables. This result clearly shows that the distinction between working directly with distribution functions (as we generally do in the theory of probabilistic metric spaces) rather than with random variables, is intrinsic and not just a matter of taste. It further shows that there are topics in probability which are not encompassed by the standard measure-theoretic model of the theory.

The third chapter is concerned with the ideas and results in the theory of probabilistic structures, their connection with the random processes, the

Scanned with OKEN Scanner

connections between points of view in their approach, the fertility of random noncompacity measures in problems of probabilistic topology but also in solving some classes of differential or integral random equations due to their application to the existence of fixed points for certain classes of operators.

The probabilistic normed spaces, the spaces with probabilistic interior product and the probabilistic normed algebras as well as other similar random structures, together with an adequate theory of operators on these structures lend this chapter an outstanding importance, especially through the fourth paragraph where some new results in probabilistic functional analysis are expounded.

Chapter IV records ideas and results concerning the application of probabilistic structures to the development of the generalised theory of information in the sense of J. Kampé de Fériet and B. Forte, introducing the space of random information with the interpretation of the probabilistic space implied as a "set of observers". This point of view valuates the results of chapter II concerning the representability of semigroups and probabilistic structures for the generation of new types of information and a unitary encompassing in an axiomatic theory of a new kind. Also, in the study of the entropy of the Hausdorff capacity and dimension of sets in PM-spaces, new results are obtained with the help of random measures of noncompacity defined by us.

The authors present applications of PM-spaces to the study of systems having hysteresis, of mixture processes, to the definition of some stochastic spaces with applications in the physics of the microcosmos in the sense of the theories elaborated by D. J. Blokhintsev. In conclusion some applications of probabilistic structures in psychology are specified, the measuring error theory or the fiability theory are given.

The authors are both doctors of mathematics known for theirs researches concerning the theory of operators on Hilbert and Banach spaces and the probability theory, being frequent contributors to different mathematical reviews in Romania and other countries.

Redactor: LUMINIȚA ZORILESCU
Tehnoredactor: ELENA MATEESCU

Bun de tipar: 1.VI.1981. Format: 16/70×100. Coli de tipar: 12,75. C.Z. pentru biblioteci mari și mici: 519.2

Tiparul executat sub comanda
nr. 1559 la
Intreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr.89—97
Bucuresti
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner